UNIVERSIDADE DE LISBOA

FACULDADE de CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO de MATEMÁTICA

Problemas de Máximos e Mínimos

Belmiro da Silva Ferreira

Mestrado Matemática para Professores

Lisboa

2012

UNIVERSIDADE DE LISBOA

FACULDADE de CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO de MATEMÁTICA

Problemas de Máximos e Mínimos

Belmiro da Silva Ferreira

Dissertação orientada pela Professora Doutora:

Ana Cristina Barroso

Mestrado Matemática para Professores

Lisboa

2012

Resumo

Os problemas de máximos e de mínimos suscitam grande interesse aos matemáticos, principalmente por resultarem muitas vezes de situações do dia a dia. São apresentados problemas clássicos e outros visando percorrer diversas áreas da matemática, sem nos distanciarmos da sua aplicação ao ensino da matemática no secundário. As resoluções apresentadas, baseadas numa pequena fundamentação teórica, têm a preocupação de abarcar diferentes abordagens e proporcionar o relacionamento de conceitos.

Palavras-chave: máximo, mínimo, derivada, otimização.

Abstract

Problems of maxima and minima are very interesting to mathematicians, in part because they arise in everyday situations. We present some classical problems and others spanning various areas of mathematics, keeping in mind their application in the teaching of secondary school mathematics.
The solutions presented here, for which we provide a short theoretical basis, intend to cover different approaches and allow the possibility of relating concepts.

Keywords: maximum, minimum, derivative, optimization.

Índice

Agradecimentos

Apresento os meus agradecimentos à Professora Doutora Ana Cristina Barroso por sempre se ter mostrado bastante interessada e disponível, pelo que, a sua orientação foi importantíssima na elaboração deste meu trabalho.

Introdução

Os problemas de máximos e de mínimos desde de muito cedo despertaram a atenção dos matemáticos. Por exemplo, os gregos no século III a.C. já sabiam que de todas as curvas com igual perímetro, a que envolvia maior área era o círculo. Contudo estes problemas eram resolvidos utilizando processos engenhosos, não havendo uma forma sistemática de os solucionar. Só no século XVII, Fermat desenvolveu o primeiro método geral para a determinação de máximos e mínimos. No entanto este método era um procedimento algorítmico desprovido de qualquer fundamentação demonstrativa. A generalização da resolução deste tipo de problemas aparece com o trabalho de Newton e Leibniz no desenvolvimento do Teorema Fundamental do Cálculo.

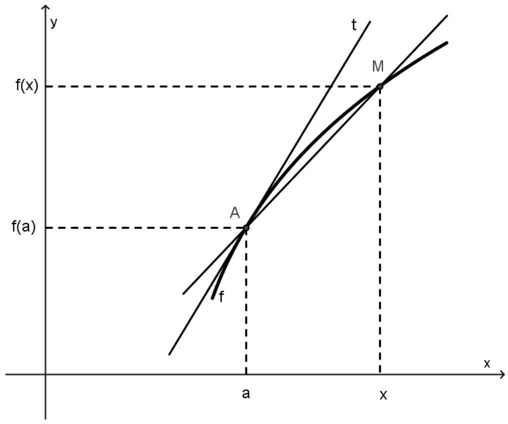
O interesse deste tipo de problemas reside sobretudo na forma como são adaptados ao quotidiano e a situações da vida real, permitindo modular e interpretar fenómenos à nossa volta. Com inúmeras aplicações em diversas áreas, como a Física ou Engenharia, têm também uma grande importância a nível pedagógico. Aplicáveis a vários conteúdos da matemática, para além de desenvolver o estudo do cálculo diferencial, proporcionam trabalhar conceitos relativos a funções, trigonometria, geometria entre outros.

Após uma pequena revisão de conceitos teóricos que permitem e fundamentam a resolução dos problemas de máximos e mínimos, foram selecionados diversos problemas, visando cobrir uma grande área de conteúdos matemáticos e diferentes formas de abordagem. De referir que a grande maioria dos problemas apresentados são de aplicação direta ou de fácil adaptação ao ensino secundário, nomeadamente 12º ano. Algumas das resoluções são enriquecidas com mais do que uma abordagem e por vezes aparece uma resolução usando funções de duas variáveis.

Por fim, fugindo um pouco ao método clássico, são aplicadas propriedades das médias ao cálculo de soluções ótimas de alguns problemas, que utilizando outros métodos seriam de difícil resolução.

1. Preliminares

1.1. Funções de uma variável



Consideremos uma função real $f(x)$ definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. A taxa de variação média da função entre dois pontos $A(a, f(a))$ e $M(x, f(x))$ com $a, x \in I$ e $x \neq a$, é dada por $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

A taxa de variação da função no ponto A é o limite quando $x \to a$ da razão incremental $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

A taxa de variação média da função entre dois pontos A e M é o declive da reta AM, secante ao gráfico da função nos pontos A e M. A reta t cujo declive é igual ao $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, diz-se tangente ao gráfico da função no ponto A.

Definição 1.1 Diz-se que uma função f, real de variável real, definida numa vizinhança de um ponto a, é diferenciável em a, se existe e é finito o limite: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. A este limite chama-se derivada de f no ponto a e representa-se por

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Diz-se que f é derivável ou diferenciável à esquerda em a se existe e é finito o limite:

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f_e'(a).$$

Diz-se que f é derivável ou diferenciável à direita em a se existe e é finito o limite:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f_d'(a).$$

Se $f_e'(a) = f_d'(a)$ então f é derivável ou diferenciável em a e tem-se $f'(a) = f_e'(a) = f_d'(a)$.

Definição 1.2 Diz-se que a função $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função derivável ou diferenciável no aberto D se for derivável em todo o ponto de D. À nova função $f': D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$, chama-se derivada de f.

Nota 1.3 Se f é diferenciável num ponto a, o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto $A(a, f(a))$ é igual a $f'(a)$. A reta tangente ao gráfico nesse ponto tem por equação $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

Proposição 1.4 Se $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função derivável em $a \in \operatorname{int} D$, então f é contínua nesse ponto.

Demonstração.

Para $x \in D$, com $x \neq a$ temos $f(x) - f(a) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)$, pelo que $\lim\limits_{x \to a}\left[f(x) - f(a)\right] = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) = f'(a) \times 0 = 0$.

Ou seja $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, que prova que a função f é contínua em a.□

Proposição 1.5 Uma função $f(x)$ definida num intervalo aberto I é diferenciável num ponto $a \in I$ se e só se existe um número l tal que se tem numa vizinhança de a

$$f(x) - f(a) = l(x-a) + r(x) \tag{1.1}$$

em que $r(x)$ é uma função contínua e nula no ponto a (infinitésimo no ponto a) tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{r(x)}{x-a} = 0 \tag{1.2}$$

O número l é único e igual a $f'(a)$.

Demonstração.

$(\Leftarrow)$

Nas condições do enunciado de (1.1) deduz-se que para $x \neq a$ se tem, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l + \dfrac{r(x)}{x-a}$, donde em consequência de (1.2), vem $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$, o que prova que f é diferenciável em a e que $f'(a) = l$.

Reciprocamente, se $f(x)$ é diferenciável no ponto a, escrevendo $r(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$, obtemos (1.1) com $l = f'(a)$. A função $r(x)$ verifica as condições da proposição, pois é diferença de duas funções contínuas, logo é uma função contínua, é nula no ponto a e verifica (1.2), uma vez que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{r(x)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) = 0$.□

Lemos a relação (1.2) dizendo que $r(x)$ é desprezável ou muito pequena em comparação com $x-a$ numa vizinhança de a e escreve-se, usando a notação de Landau:

$$r(x) = o(x-a). \tag{1.3}$$

As relações (1.1) e (1.2) da proposição 1.5 podem sintetizar-se numa única igualdade:

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + o(x-a). \tag{1.4}$$

Teorema 1.6 Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções deriváveis em $a \in \operatorname{int} D$; então

1. $f+g$ é derivável em a e $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;
2. $f \cdot g$ é derivável em a e $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a)$;
3. f^n é derivável em a e $\left(f^n\right)'(a) = nf^{n-1}(a)f'(a)$, $n \in \mathbb{N}$;
4. Se $g(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ é derivável em a e $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g^2(a)}$.

Demonstração.

1.

$$\left(f+g\right)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\left(f+g\right)\left(x\right)-\left(f+g\right)\left(a\right)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f\left(x\right)+g\left(x\right)-f\left(a\right)-g\left(a\right)}{x-a}=$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f\left(x\right)-f\left(a\right)}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{g\left(x\right)-g\left(a\right)}{x-a}=f'(a)+g'(a)\ \square$$

2. Queremos mostrar que:

$$\left(f\cdot g\right)'(a)=f'(a)g(a)+g'(a)f(a)$$

$$\left(f\cdot g\right)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\left(f\cdot g\right)\left(x\right)-\left(f\cdot g\right)\left(a\right)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)-f\left(a\right)\cdot g\left(a\right)}{x-a}$$

Adicionando e subtraindo $f\left(a\right)\cdot g\left(x\right)$ ao numerador, vem

$$\left(f\cdot g\right)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)-f\left(a\right)\cdot g\left(x\right)+f\left(a\right)\cdot g\left(x\right)-f\left(a\right)\cdot g\left(a\right)}{x-a}=$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{\left(f\left(x\right)-f\left(a\right)\right)\cdot g\left(x\right)+\left(g\left(x\right)-g\left(a\right)\right)f\left(a\right)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\left[\frac{\left(f\left(x\right)-f\left(a\right)\right)}{x-a}g\left(x\right)+\frac{g\left(x\right)-g\left(a\right)}{x-a}f\left(a\right)\right]=f'\left(a\right)\cdot g\left(a\right)+g'\left(a\right)\cdot f\left(a\right)$$

uma vez que $\lim_{x\to a}g\left(x\right)=g\left(a\right)$, porque g é derivável em a e por consequência é contínua em a .□

3. Vamos provar por indução que $\left(f^{n}\right)'(a)=nf^{n-1}(a)f'(a)$, $n\in\mathbb{N}$

Para $n=1$

$\left(f\right)'(a)=1f^{0}\left(a\right)f'\left(a\right)=f'\left(a\right)$ Proposição Verdadeira

Hipótese de indução

Suponhamos para um certo $p\in\mathbb{N}$, que:

$$\left(f^{p}\right)'(a)=p\cdot f^{p-1}(a)f'(a)$$

Queremos mostrar que

$$\left(f^{p+1}\right)'(a)=\left(p+1\right)\cdot f^{p}(a)f'(a)$$

Usando a propriedade 2 tem-se

$$\left(f^{p+1}\right)'(a)=\left(f\cdot f^{p}\right)'(a)=f'(a)f^{p}(a)+f(a)\left(f^{p}\right)'(a)\underset{H.I.}{=}$$
$$=f'(a)f^{p}(a)+f(a)\,p\cdot f^{p-1}(a)f'(a)=$$
$$=f'(a)f^{p}(a)+p\cdot f^{p}(a)f'(a)=(p+1)\cdot f^{p}(a)f'(a). \qquad \square$$

4. Como $g(a)\neq 0$ e g é contínua em a existe um aberto I contendo a tal que $g(x)\neq 0$, $\forall x\in I\cap D$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f}{g}(x)-\frac{f}{g}(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)\cdot g(a)-f(a)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(a)}}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot g(a)-f(a)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(a)(x-a)}$$

adicionando e subtraindo $f(x)\cdot g(x)$ ao numerador, vem:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot g(a)-f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(a)(x-a)}=$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot\left(g(a)-g(x)\right)+\left(f(x)-f(a)\right)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(a)(x-a)}$$
$$=\lim_{x\to a}\left[\frac{\left(f(x)-f(a)\right)g(x)}{g(x)\cdot g(a)(x-a)}-\frac{\left(g(x)-g(a)\right)f(x)}{g(x)\cdot g(a)(x-a)}\right]=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{g^{2}(a)}$$

uma vez que $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ e $\lim_{x\to a}g(x)=g(a)$, porque f e g são deriváveis em a e por consequência contínuas em a.$\square$

Proposição 1.7 (Derivação da função composta). Sejam f e g funções reais definidas em intervalos abertos J e I de $\mathbb{R}$, respetivamente, tais $g(I)\subset J$. Então, se g é diferenciável num ponto $t_0\in I$ e f é diferenciável no ponto correspondente $x_0=g(t_0)$, $f\circ g$ é diferenciável em t_0 e $(f\circ g)'(t_0)=f'(x_0)\cdot g'(t_0)$.

Demonstração.

Como $f(x)$ é diferenciável em x_0, pode-se escrever

$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)f'(x_0)+o(x-x_0)$ ou seja

$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+(x-x_0)\alpha(x)$, em que $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Substituindo x por $g(t)$, vem

$$f\left[g(t)\right]-f\left[g(t_0)\right]=f'(x_0)\left[g(t)-g(t_0)\right]+\left[g(t)-g(t_0)\right]\alpha\left[g(t)\right]$$
$$\Leftrightarrow f\left[g(t)\right]-f\left[g(t_0)\right]=\left[f'(x_0)+\alpha\left[g(t)\right]\right]\left[g(t)-g(t_0)\right]$$

dividindo ambos os membros por $t-t_0$ obtemos

$$\frac{f\left[g(t)\right]-f\left[g(t_0)\right]}{t-t_0}=\left[f'(x_0)+\alpha\left[g(t)\right]\right]\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}$$

passando ao limite quando $t\to t_0$, vem

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f\left[g(t)\right]-f\left[g(t_0)\right]}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\left[\left[f'(x_0)+\alpha\left[g(t)\right]\right]\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}\right]$$

ou seja

$(f\circ g)'(t_0)=f'(x_0)g'(t_0)$, uma vez que $\lim\limits_{t\to t_0}\alpha\left[g(t)\right]=0$ por continuidade de g em t_0. □

Proposição 1.8 (Derivação da função inversa). Seja f uma função diferenciável e injetiva definida num intervalo $I\subset\mathbb{R}$. Seja $x_0\in I$ tal que $f'(x_0)\neq 0$; então $f^{-1}:f(I)\to I$ é diferenciável em $y_0=f(x_0)$ e $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Demonstração.

Seja f uma função diferenciável e injetiva definida num intervalo $I\subset\mathbb{R}$.

Seja $y=f(x)$, como f^{-1} é injetiva se $y\neq y_0\Rightarrow f^{-1}(y)\neq f^{-1}(y_0)=x_0$.

Então podemos escrever $\dfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\dfrac{1}{\dfrac{y-y_0}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}}=\dfrac{1}{\dfrac{f\left[f^{-1}(y)\right]-f(x_0)}{f^{-1}(y)-x_0}}$.

Como f é diferenciável, logo contínua e está definida num intervalo, a sua inversa f^{-1} é contínua e portanto $y\to y_0\Rightarrow f^{-1}(y)\to x_0$.

Passando ao limite temos:

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{1}{\dfrac{f\left[f^{-1}(y)\right]-f(x_0)}{f^{-1}(y)-x_0}}=\frac{1}{f'(x_0)}$$

□

Definição 1.9 Seja $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $a\in D$. Diz-se que f tem em a um máximo local (ou relativo) se existe $\varepsilon>0$ tal que $f(x)\leq f(a)$, $\forall x\in V_\varepsilon(a)\cap D$. Do mesmo modo, diz-se que f tem em a um mínimo local (ou relativo) se existe $\varepsilon>0$ tal que $f(x)\geq f(a)$, $\forall x\in V_\varepsilon(a)\cap D$.
Diz-se que f tem em a um máximo absoluto se $f(x)\leq f(a)$, $\forall x\in D$. Do mesmo modo, diz-se que f tem em a um mínimo absoluto se $f(x)\geq f(a), \forall x\in D$.
Se a função possui um máximo ou mínimo (relativo ou absoluto) dizemos que a função tem um extremo (relativo ou absoluto).

Proposição 1.10 Seja f uma função diferenciável em x_0.

1) Se $f'(x_0)>0$ então $f(x_0-h)<f(x_0)<f(x_0+h)$, $\forall h>0$ suficientemente pequeno.
2) Se $f'(x_0)<0$ então $f(x_0-h)>f(x_0)>f(x_0+h)$, $\forall h>0$ suficientemente pequeno.

Demonstração.

1)

Por definição tem-se que $f'(x_0)=\lim_{k\to 0}\dfrac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k}$.

Como $f'(x_0)>0$ usando a definição de limite sabemos que existe $\delta>0$ tal que se

$0<|k|<\delta$ então $\left|\dfrac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k}-f'(x_0)\right|<f'(x_0)$

donde $-f'(x_0)<\dfrac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k}-f'(x_0)<f'(x_0)\Leftrightarrow 0<\dfrac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k}<2f'(x_0)$.

Em particular, $\dfrac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k}>0$, $\forall 0<|k|<\delta$.

Tomando $0<h<\delta$ tem-se $0<|h|<\delta$ e $0<|-h|<\delta$ logo

$\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}>0 \Rightarrow f(x_0+h)>f(x_0)$ e $\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}>0 \Rightarrow f(x_0-h)<f(x_0)$.

A demonstração de 2) faz-se de forma análoga. □

Teorema 1.11 *(Fermat)* Seja $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com derivada em $a \in \operatorname{int} D$. Se f tem em a um extremo local, então $f'(a)=0$.

Demonstração.

Suponhamos que f tem em a um máximo local (o outro caso é análogo).

Como $a \in \operatorname{int} D$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x-a|<\delta$, então $x \in D$ e $f(x) \leq f(a)$. Portanto, para $a < x < a+\delta$ temos $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$. Logo,

$$f'_d(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0. \tag{1.5}$$

Por outro lado, para $a-\delta < x < a$ temos $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$. Portanto,

$$f'_e(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0. \tag{1.6}$$

Mas como, por hipótese, existe $f'(a)$, temos $f'(a)=f'_d(a)=f'_e(a)$.

De (1.5) e (1.6) vem $f'(a)=0$.□

Note-se que o recíproco deste resultado é falso. Por exemplo, a função $f(x)=x^3$ verifica $f'(0)=0$ mas sendo uma função estritamente crescente não tem extremo em $x=0$.

Teorema 1.12 *(Weierstrass)* Uma função contínua num intervalo fechado $[a,b] \subset \mathbb{R}$, tem máximo e mínimo absolutos nesse intervalo.

Teorema 1.13 *(Rolle)* Seja $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, com $a\neq b$, uma função contínua no intervalo limitado e fechado $[a,b]$ e com derivada finita em todos os pontos do seu interior $]a,b[$. Se $f(a)=f(b)$ então existe pelo menos um ponto $\xi\in]a,b[$ tal que $f'(\xi)=0$.

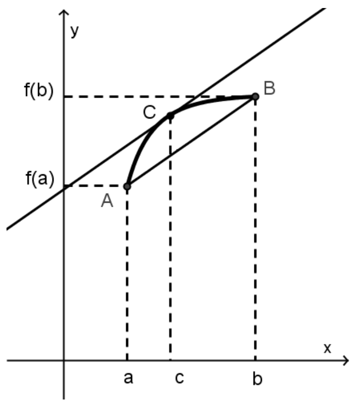
Demonstração.

Sendo f contínua no intervalo fechado e limitado $[a,b]$, f tem máximo e mínimo nesse intervalo pelo Teorema de Weierstrass. Se o máximo e o mínimo são atingidos nos extemos do intervalo, como $f(a)=f(b)$, tem-se f constante e portanto para qualquer $c\in]a,b[$, $f'(c)=0$.

No caso do máximo ou do mínimo ser atingido num ponto interior $\xi\in]a,b[$ tem-se pelo teorema de Fermat que $f'(\xi)=0$. □

Teorema 1.14 *(Valor Médio de Lagrange)* . Seja $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, com $a\neq b$, uma função contínua no intervalo limitado e fechado $[a,b]$ e com derivada finita no interior $]a,b[$. Então, existe pelo menos um ponto $c\in]a,b[$ tal que $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.

Geometricamente o teorema do valor médio estabelece que se uma função f for contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$, então existe pelo menos um ponto c entre a e b onde a tangente ao gráfico de f é paralela ao segmento de reta que une os pontos $A(a,f(a))$ e $B(b,f(b))$.



Demonstração.

Seja $g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$.

Devido às hipóteses sobre f resulta que a função g é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$.

Tem-se ainda que

$$g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}b=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left[(b-a)+a\right]=$$

$$=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}a=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}a=g(a)$$

portanto o Teorema de Rolle garante que $\exists c \in]a,b[$ tal que $g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0$.

Logo $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ □.

Corolário 1.15 Seja $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$. Se $f'(x) = 0$, $\forall x \in]a,b[$ então $f(x)$ é constante no intervalo $[a,b]$.

Demonstração.

Para $x \in]a,b[$, a função f satisfaz as condições do teorema de Lagrange em $[a,x]$. Então pelo referido teorema, existe pelo menos um ponto $c \in]a,x[$ tal que $f(x) - f(a) = (x-a) f'(c)$. Mas por hipótese $f'(x) = 0$, $\forall x \in]a,b[$, logo $f'(c) = 0$ e como tal $f(x) = f(a)$, $\forall x \in [a,b[$. Por continuidade de f em b conclui-se que f é constante em $[a,b]$.□

Corolário 1.16 Seja $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$.

1) Então $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in]a,b[\Leftrightarrow f$ é crescente em $[a,b]$.

$f'(x) \leq 0$, $\forall x \in]a,b[\Leftrightarrow f$ é decrescente em $[a,b]$.

2) Tem-se ainda $f'(x) > 0$, $\forall x \in]a,b[\Rightarrow f$ é estritamente crescente em $[a,b]$.

$f'(x) < 0$, $\forall x \in]a,b[\Rightarrow f$ é estritamente decrescente em $[a,b]$.

Demonstração.

$(\Rightarrow)$

Seja f uma função nas condições do enunciado e tomemos $x, y \in [a,b]$, com $x < y$. Pelo Teorema de Lagrange $\exists c \in]x,y[$ tal que $f(y) - f(x) = (y-x) f'(c)$.

Então $f'(c) \geq 0 \Rightarrow f(y) - f(x) \geq 0$ (respetivamente $f'(c) > 0 \Rightarrow f(y) - f(x) > 0$) ou seja, f é crescente (respetivamente estritamente crescente) em $[a,b]$.

A demonstração para o caso decrescente é análoga.

$(\Leftarrow)$

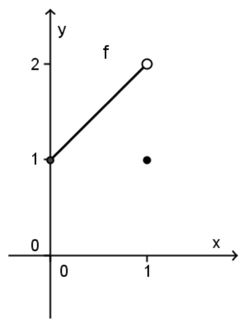
Seja $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função monótona crescente, isto é, $x,y\in[a,b],\quad x<y\Rightarrow f(x)\le f(y)$. Como f é derivável em $c\in\,]a,b[$ e $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\ge 0$, para $x\ne c$, conclui-se que $f'(c)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\ge 0$.

Do mesmo modo, se f é monótona decrescente e derivável em $c\in\,]a,b[$, $f'(c)\le 0$. □

Observações

1. O recíproco de 2) do último corolário é falso. Tome-se mais uma vez como exemplo a função $f(x)=x^3$, que é estritamente crescente. No entanto $f'(0)=0$.

2. A hipótese da continuidade de f no intervalo fechado $[a,b]$ é muito importante, pois se não se verificar o resultado é falso, como podemos ver no seguinte exemplo:



$$f(x)=\begin{cases} x+1 & ,\ \text{se } 0\le x<1 \\ 1 & ,\ \text{se } x=1 \end{cases}$$

$f'(x)=1>0$ para todo $x\in\,]0,1[$ e no entanto, f não é crescente em $[0,1]$.

O corolário não pode ser aplicado porque $f(x)$ não é contínua no ponto 1.

Resulta imediatamente do corolário anterior que:

Teorema 1.17 Seja f uma função diferenciável numa vizinhança do ponto c tal que $f'(c)=0$. Se existe $\delta>0$ tal que:

i) $f'(x)>0,\ \forall x\in\,]c-\delta,c[$ e $f'(x)<0,\ \forall x\in\,]c,c+\delta[$ então $f(c)$ é um máximo local.

ii) $f'(x)<0,\ \forall x\in\,]c-\delta,c[$ e $f'(x)>0,\ \forall x\in\,]c,c+\delta[$ então $f(c)$ é um mínimo local.

iii) $f'(x)$ tem o mesmo sinal em $]c-\delta,c[\,\cup\,]c,c+\delta[$ então $f(c)$ não é extremo local.

Teorema 1.18 (*Valor Médio de Cauchy)* Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, com $a \neq b$, funções contínuas no intervalo limitado e fechado $[a,b]$ e com derivada finita em $]a,b[$. Então, se $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a,b[$, existe pelo menos um ponto $c \in]a,b[$ tal que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Demonstração.

Note-se que $g(b)-g(a) \neq 0$, porque caso contrário pelo teorema de Rolle existiria $c \in]a,b[$ tal que $g'(c)=0$.

Seja $h(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g(x)$.

Tem-se

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot \left[\left(g(b)-g(a)\right)+g(a)\right] =$$

$$= f(b) - f(b) + f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(a) = h(a)$$

h é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$, porque f e g são contínuas em $[a,b]$ e diferenciáveis em $]a,b[$.

Então pelo teorema de Rolle, existe $c \in]a,b[$ tal que $h'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0$.

Logo $f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = f'(c) \Leftrightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ □.

Definição 1.19 Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em D e seja $a \in \operatorname{int}(D)$. Se f' é diferenciável em a então diz-se que f é duas vezes diferenciável em a. A segunda derivada de f em a representa-se por $f''(a)$ e é dada por:

$$f''(a) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}.$$

Se existem $f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ em D e $f^{(n-1)}$ é derivável em a, então diz-se que f tem derivada de ordem n em a: $f^{(n)}(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a}$.

A função f diz-se de classe C^n em D e escreve-se $f \in C^n(D)$, se todas as derivadas de f até à ordem n forem contínuas em D.

Proposição 1.20 Seja $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável num ponto $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$. Então,

1) $se\, f''(c) > 0 \;\Rightarrow\; c$ é ponto de mínimo local.

2) $se\, f''(c) < 0 \;\Rightarrow\; c$ é ponto de máximo local.

Demonstração.

1)

Suponhamos que $f''(c) > 0$.

Pelo corolário 1.16 aplicado a f', $\exists \delta > 0$ tal que, se

$c - \delta < x_1 < c < x_2 < c + \delta$ então $f'(x_1) < f'(c) < f'(x_2)$.

Como $f'(c) = 0$ tem-se

$f'(x) < 0$, $\forall x \in]c - \delta, c[$ e $f'(x) > 0$, $\forall x \in]c, c + \delta[$, logo $f(c)$ é mínimo local, conforme o teorema 1.17.

Analogamente se provaria 2). □

1.2. Funções de duas variáveis

Definição 1.21 Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função definida numa parte D de $\mathbb{R}^2$. Seja (a,b) um ponto interior a D. Diz-se que f tem derivada parcial em ordem a x no ponto (a,b) quando existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$, e ao número real $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ chama-se derivada parcial de f em ordem a x no ponto (a,b).

Pode-se ainda definir derivada parcial de f em ordem a y no ponto (a,b), como:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}.$$

As derivadas parciais de 2ª ordem de uma função $f(x,y)$ de duas variáveis, são representadas pelos símbolos:

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Definição 1.22 Uma função $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diz –se de classe C^0 no aberto A quando f for contínua em A; diz-se que f é de classe C^k em A $\left(k \in \{1,2,3,\ldots\}\right)$, e escreve-se $f \in C^k(A)$, quando existirem todas as derivadas parciais de ordem $\leq k$ de f em A e forem todas contínuas em A; f diz-se de classe C^∞ em A, quando $f \in C^k(A)$ para qualquer $k \in \{0,1,2,3,\ldots\}$.

Teorema 1.23 *(Schwarz)* Se $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 no aberto A, então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ em todos os pontos de } A.$$

Definição 1.24 Seja $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função definida numa parte D de $\mathbb{R}^2$ e seja (a,b) um ponto interior a D. Suponhamos ainda que f tem derivadas parciais de primeira ordem em (a,b). Então chama-se gradiente de f no ponto (a,b) ao vetor cujas componentes são as 2 derivadas parciais de primeira ordem de f calculadas no ponto (a,b). Representa-se por $(grad\, f)(a,b)$ ou $\nabla f(a,b)$. Assim,

$$\nabla f(a,b)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b),\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$

Os pontos onde o gradiente de f se anula designam-se pontos de estacionaridade de f.

Definição 1.25 Seja $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função definida numa parte D de $\mathbb{R}^2$ e seja (a,b) um ponto interior a D. Diz-se que f é diferenciável em (a,b) se e só se existe $\alpha \in \mathbb{R}^2$ tal que:

$$f(a+h_1,b+h_2)-f(a,b)=\alpha\cdot(h_1,h_2)+o(h_1,h_2),$$

em que a função $o(h_1,h_2)$, satisfaz a condição $\displaystyle\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{o(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|}=0$.

Pode-se mostrar que existe um único vetor $\alpha \in \mathbb{R}^2$ nestas condições e que $\alpha=\nabla f(a,b)$.

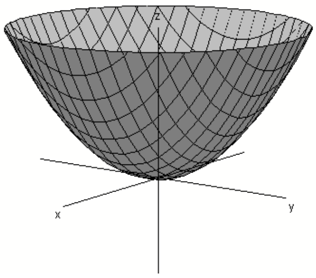
1.2.1. Extremos livres

As noções de extremo apresentadas na definição 1.9 generalizam-se de forma natural às funções de duas variáveis.
O resultado seguinte é consequência do teorema 1.11.

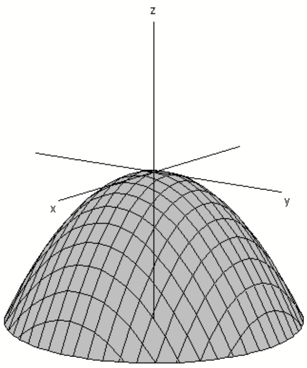
Teorema 1.27 *(Fermat)* Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, uma função diferenciável no ponto (a,b), interior a D. Então, se f tem um extremo em (a,b) tem-se $\nabla f(a,b) = 0$.

Definição 1.28. Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a,b) \in \operatorname{int} D$, um ponto de estacionariade de f. Se f não tem um extremo em (a,b), então (a,b) diz-se um ponto de sela.

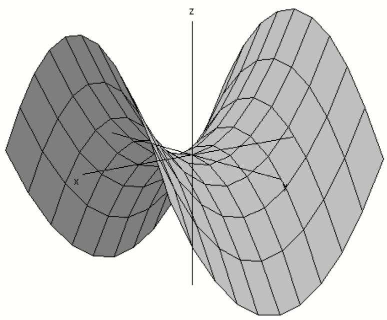
Apresentamos em seguida exemplos de gráficos de funções que possuem um mínimo, um máximo e um ponto de sela em (0,0).



A função $f_1(x,y) = x^2 + y^2$ possui um mínimo em (0,0)



A função $f_2(x,y) = -(x^2 + y^2)$ possui um máximo em (0,0)



A função $f_3(x,y) = x^2 - y^2$ possui um ponto sela em (0,0)

Definição 1.29 Se f for uma função de classe C^2 no ponto (a,b), chama-se matriz hessiana de f em (a,b) e representa-se por $H(a,b)$ à matriz dada por

$$H(a,b) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{bmatrix}.$$

Trata-se de uma matriz quadrada do tipo 2×2, simétrica, conforme o Teorema de Schwarz.

Teorema 1.30 Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 definida num aberto A e seja (a,b) um ponto de estacionaridade de f.

a) Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$ e $|H(a,b)| > 0$ então f tem um mínimo local em (a,b).

b) Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$ e $|H(a,b)| > 0$ então f tem um máximo local em (a,b).

c) Se $|H(a,b)| < 0$ então f tem um ponto sela em (a,b).

d) Se $|H(a,b)| = 0$ não podemos afirmar nada acerca da natureza do ponto de estacionaridade (a,b).

Para mostrar que no caso de d) nada se pode concluir, consideremos os exemplos abaixo, cujas funções verificam a condição $|H(0,0)| = 0$, mas:

- $f(x,y) = x^4 + y^4$, tem mínimo em $(0,0)$,
- $g(x,y) = -(x^4 + y^4)$, tem máximo em $(0,0)$,
- $h(x,y) = x^4 - y^4$, tem um ponto de sela em $(0,0)$.

1.2.2. Extremos condicionados

Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas num aberto A de $\mathbb{R}^2$ e suponhamos que queríamos estudar os extremos de $f(x,y)$ com a variável (x,y) condicionada à relação $g(x,y) = 0$. Dizemos que temos um problema de extremos condicionados, sendo $g(x,y) = 0$ a condição a que estão sujeitas as variáveis x e y. O problema resume-se a calcular os extremos da função f restrita ao conjunto não vazio $C = \{(x,y) \in A : g(x,y) = 0\}$, representada por $f|_C$.

Supondo que f, g são funções de classe $C^1(A)$ e que $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$ para qualquer $(x,y) \in A$ tal que $g(x,y) = 0$, temos o seguinte:

Teorema 1.31 *(Lagrange)* Se $f|_C$ tem um extremo em $(a,b) \in C$, então para um certo $\lambda \in \mathbb{R}$, a função $F(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$, definida em A, tem um ponto de estacionaridade em (a,b).

2. Reflexão e Refração

2.1. Problema de Héron

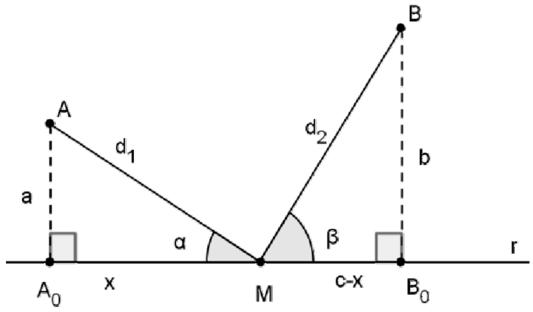
Dada uma reta, r, e dois pontos A e B do mesmo lado da reta, encontrar um ponto M de r, de modo a que a soma das distâncias $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ seja mínima.

Resolução.

Sejam A_0 e B_0 as projeções ortogonais de A e B, respetivamente, na reta r.

Sejam $a,b,c>0$, em que $\overline{AA_0}=a$, $\overline{BB_0}=b$, $\overline{A_0B_0}=c$.

Sejam α e β os ângulos formados pela retas r e MA e pelas retas r e MB, respetivamente. Logo $\alpha,\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.



Designemos $\overline{A_0M}=x$.

Para $x\in\left]0,c\right[$, designemos por $\overline{MA}=d_1$, $\overline{MB}=d_2$ e o caminho AMB por d, em que $d=d_1+d_2$.

$$d_1^{\,2}=a^2+x^2 \Leftrightarrow d_1=\sqrt{a^2+x^2}$$

$$d_2^{\,2}=b^2+(c-x)^2 \Leftrightarrow d_2=\sqrt{b^2+(c-x)^2}$$

$d(x)=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(c-x)^2}$, trata-se de uma função contínua no intervalo $[0,c]$.

$$d'(x)=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$$

$$d'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}},$$

elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos:

$$\frac{x^2}{a^2+x^2}=\frac{(c-x)^2}{b^2+(c-x)^2} \Leftrightarrow x^2\left(b^2+(c-x)^2\right)=(c-x)^2\left(a^2+x^2\right) \Leftrightarrow x^2b^2+x^2(c-x)^2=(c-x)^2\left(a^2+x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2b^2=(c-x)^2\left(a^2+x^2\right)-x^2(c-x)^2 \Leftrightarrow x^2b^2=a^2(c-x)^2 \Leftrightarrow \frac{b^2}{(c-x)^2}=\frac{a^2}{x^2}$$

ou seja,

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{(c-x)} \tag{2.1}$$

Portanto $tg\alpha = tg\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

De (2.1) vem que o ponto de estacionaridade é

$$a(c-x) = bx \Leftrightarrow ac - ax = bx \Leftrightarrow bx + ax = ac \Leftrightarrow x(b+a) = ac \Leftrightarrow x = \frac{ac}{b+a}$$

$$d''(x) = \left(x\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \right)' - \left((c-x)\left(b^2+(c-x)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \right)'$$

$$= \left(a^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x \cdot 2x\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} - \left(-\left(b^2+(c-x)^2\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \times 2(c-x)^2\left(b^2+(c-x)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left(b^2+(c-x)^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(c-x)^2}{\left(b^2+(c-x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{a^2+x^2-x^2}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{b^2+(c-x)^2-(c-x)^2}{\left(b^2+(c-x)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{b^2}{\left(b^2+(c-x)^2\right)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

Como tal $d''\left(\frac{ac}{b+a}\right) > 0$ e portanto $x = \frac{ac}{b+a}$ é minimizante de $d(x)$.

Uma vez que $d(0) = a + \sqrt{b^2+c^2}$, $d(c) = \sqrt{a^2+c^2} + b$ e $d\left(\frac{ac}{b+a}\right) = \sqrt{(a+b)^2+c^2}$ concluímos que $d\left(\frac{ac}{b+a}\right)$ é o mínimo absoluto de d em $[0,c]$.

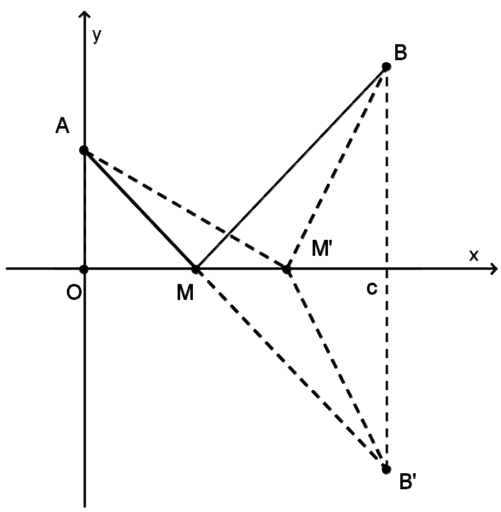
2.1.1. Resolução Geométrica

Este problema pode ser resolvido geometricamente.

Para tal vamos considerar um referencial cartesiano com origem na projeção do ponto A na reta r. As coordenadas de A e B são $A(0,a)$, $B(c,b)$.

Seja $B'(c,-b)$ o simétrico de B em relação ao eixo das abcissas.

Como sabemos, a distância mínima entre dois pontos do plano é o comprimento do segmento de reta que os une. Assim o caminho mais curto de A a B' é o segmento de reta $[AB']$. Mas $\overline{MB} = \overline{MB'}$ pelo que



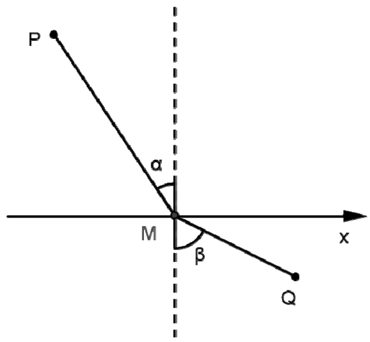
o ponto M procurado é a interseção da reta AB' com o eixo Ox, pois para outro ponto M' de r temos:

$\overline{AM'}+\overline{BM'}=\overline{AM'}+\overline{M'B'}>\overline{AB'}=\overline{AM}+\overline{MB}$ usando as propriedades da simetria e a desigualdade triangular.

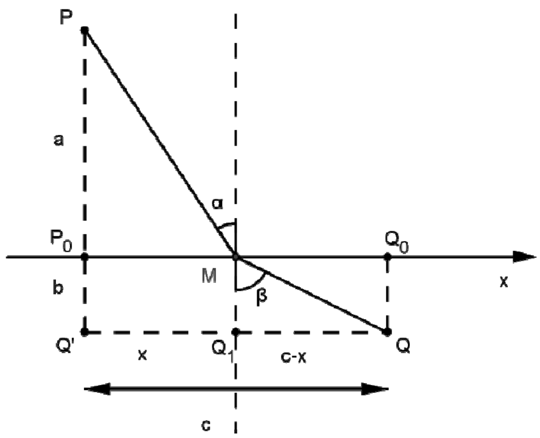
Para determinar as coordenadas de M, vamos escrever a equação reduzida de AB' e calcular a sua interseção com o eixo dos x.

O declive da reta AB' é $m_{AB'}=-\dfrac{a+b}{c}$ e a sua equação reduzida é : $y=-\dfrac{a+b}{c}x+a$. De modo que para $y=0$, vem $\dfrac{a+b}{c}x=a\Leftrightarrow x=\dfrac{ac}{a+b}$. Portanto, como determinado anteriormente, M é dado por $M\left(\dfrac{ac}{a+b},0\right)$.

2.2. Fenómeno da refração



Sejam P e Q dois pontos situados respetivamente nos semiplanos $y>0$ e $y<0$ de Oxy. Suponhamos que um ponto material se desloca de P para Q segundo uma linha quebrada PMQ, em que M é um ponto do eixo dos x. Se v_1 é a velocidade no semiplano $y>0$ e v_2 a velocidade no semiplano $y<0$, vamos mostrar que o ponto M para o qual é mínimo o tempo de deslocamento ao longo de PMQ é tal que $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{v_1}{v_2}$ sendo α (respetivamente β) o ângulo de vértice M, formado pelo segmento $[PM]$ (respetivamente $[MQ]$) com a vertical ao eixo dos x em M.



Sejam P_0 e Q_0, respetivamente, as projeções ortogonais de P e Q sobre o eixo dos x.

Seja Q_1 a projeção ortogonal de Q sobre a vertical e seja Q' a projeção ortogonal de Q na reta PP_0.

Seja $\overline{PM}=d_1$, $\overline{MQ}=d_2$, $\overline{PP_0}=a$, $\overline{P_0Q'}=b$, $\overline{QQ'}=c$ e $\overline{Q'Q_1}=x$.

Das leis da física sabemos que, num movimento uniforme de um ponto material, $d = vt$, onde d é a distância percorrida, v a velocidade e t o tempo decorrido.

Assim temos $d_1 = v_1 t_1 \Leftrightarrow t_1 = \dfrac{d_1}{v_1}$, em que t_1 é o tempo necessário para percorrer $[PM]$,

e $d_2 = v_2 t_2 \Leftrightarrow t_2 = \dfrac{d_2}{v_2}$, em que t_2 é o tempo necessário para percorrer $[MQ]$.

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos $d_1 = \sqrt{a^2 + x^2}$ e $d_2 = \sqrt{b^2 + (c-x)^2}$.

Designando por T o tempo necessário para o ponto material percorrer a linha quebrada PMQ,

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2}$$

Derivando,

$$T'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}$$

O valor de x para o qual T é mínimo verifica a condição $T'(x) = 0$.

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}$$

Mas $\sin\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ e $\sin\beta = \dfrac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}$,

Donde temos que: $\dfrac{\sin\alpha}{v_1} = \dfrac{\sin\beta}{v_2} \Leftrightarrow \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{v_1}{v_2}$.

3. Problema de Dido

O problema de Dido é conhecido como o mais antigo associado à determinação de máximos e mínimos, ou seja o primeiro problema do cálculo variacional.

Segundo a mitologia romana, Dido era uma princesa, filha do rei Mutto da cidade fenícia de Tiro e casada com Siqueu, o homem mais rico de todo o reino. Quando o rei faleceu, Pigmalião, o irmão de Dido, ocupou o trono. Com o objetivo de se apoderar das riquezas do seu cunhado, Pigmalião assassinou-o. Dido, juntamente com nobres tírios, parte numa longa viagem, vindo a refugiar-se na costa do Mediterrâneo, no norte de Africa. Aí chegados foram muito bem recebidos pelos indígenas e Dido para se estabelecer pediu-lhes uma porção de terra, tanta quanto ela conseguisse cercar com a pele de um boi. Os indígenas acederam a tal pedido, pois a pele de boi cobria uma parcela insignificante de terra. Dido cortou o couro em tiras finas, ligou-as pelas extremidades formando um semicírculo ao longo do mar, conseguindo desta forma obter uma vasta área que se veio a tornar no estado de Cartago, a atual Tunísia, em 850 a. C..

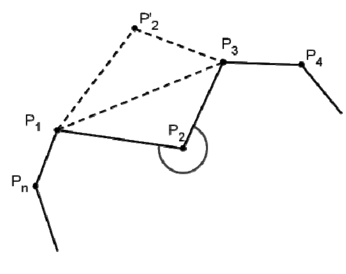
O problema de Dido resume-se a encontrar a maior área que se pode delimitar com uma curva de comprimento dado, por isso também chamado problema isoperimétrico.

Inicialmente vamos pensar que Dido conseguiu obter um determinado polígono. Mas que tipo de polígono?

Zenodorus, matemático grego que se pensa ter vivido entre o século III a.C e o século I d.C, mostrou que de *todos os polígonos de n lados com um perímetro dado, se existir um com maior área, então este tem os lados iguais e os ângulos iguais*.

Para mostrar este resultado, Zenodorus baseou-se em dois lemas.

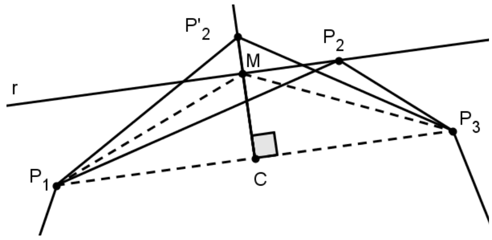
Lema 3.1 *Um polígono de n lados com área máxima tem lados iguais.*



Antes de nos debruçarmos sobre a demonstração convém ter presente o facto de um polígono não convexo não poder ser o que tem maior área e perímetro fixo.

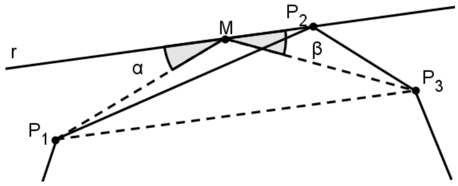
Com efeito, consideremos o polígono $\left[P_1P_2P_3...P_n\right]$. Supondo que a amplitude do ângulo $P_1P_2P_3$ é maior que 180º, considerando P_2' a reflecção de P_2 através da reta P_1P_3, obtemos o polígono $\left[P_1P_2'P_3...P_n\right]$ com maior área que o polígono $\left[P_1P_2P_3...P_n\right]$ e igual perímetro.

Demonstração do Lema 3.1



Seja $\left[P_1P_2P_3...P_n\right]$ um polígono com área máxima, como vimos este polígono é convexo. Com vista a uma contradição vamos supor que os lados não são todos iguais.

Sejam $\left[P_1P_2\right]$ e $\left[P_2P_3\right]$ dois lados adjacentes de comprimento diferente. Seja r a reta que passa em P_2 e é paralela a P_1P_3. Aplicando o problema de Héron à reta r e aos pontos P_1 e P_3, vamos encontrar um ponto M de r que minimize a soma das distâncias $\overline{P_1M}+\overline{P_3M}$. Como sabemos, os ângulos α e β em M são iguais, donde se conclui que o ângulo MP_1P_3 é igual a MP_3P_1, por serem ângulos alternos internos a α e β. Isto significa que o triângulo P_1MP_3 é isósceles e portanto M é diferente de P_2. Além disso, a área do triângulo $\left[P_1MP_3\right]$ é igual à do triângulo $\left[P_1P_2P_3\right]$, pois possuem igual base e altura.



A soma do comprimento dos lados $\left[P_1M\right]$ e $\left[MP_3\right]$ é menor que a soma dos lados do polígono $\left[P_1P_2\right]$ e $\left[P_2P_3\right]$, visto que M é a solução do problema de Héron e $M \neq P_2$.

Vamos agora construir o triângulo isósceles $\left[P_1P_2'P_3\right]$ de modo a que $\overline{P_1P_2'}+\overline{P_2'P_3}=\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}$. A sua área é, claro, maior que a área do triângulo $\left[P_1P_2P_3\right]$, uma vez que altura $\left[P_2'C\right]$ é maior que altura $\left[MC\right]$. Mas isso significa que a área do polígono $\left[P_1P_2'P_3...P_n\right]$ é maior que a do polígono $\left[P_1P_2P_3...P_n\right]$ e têm igual perímetro, o que contradiz a hipótese. □

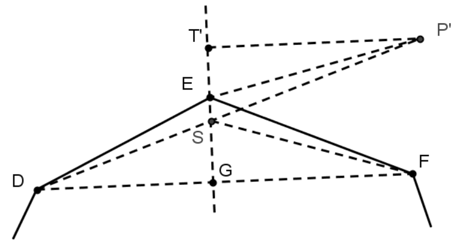
Lema 3.2 *Um polígono de n lados com área máxima tem os ângulos iguais.*

Demonstração.

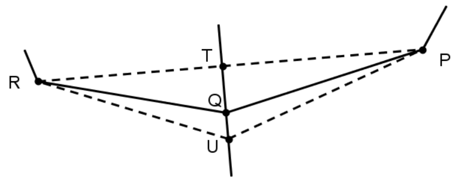
Seja $\left[P_1P_2P_3...P_n\right]$ um polígono com área máxima. Sabemos que é convexo e pelo Lema 3.1 que os seus lados são iguais.

Com vista a chegar a um absurdo, vamos supor que os seus ângulos não são todos iguais. Como tal existem α e β dois ângulos adjacentes diferentes. Vamos provar que isto implica que existem dois ângulos não adjacentes diferentes.

Consideremos $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,....$ ângulos consecutivos do polígono. Se $\gamma \neq \alpha$ ou $\delta \neq \beta$, então a prova está completa, uma vez que α e γ (ou β e δ) são não adjacentes. Se $\gamma = \alpha$, $\delta = \beta$ e $\alpha \neq \beta$, então a sequência de ângulos é $\alpha,\beta,\alpha,\beta,\varepsilon,....$, e a prova está completa, pois o primeiro e o quarto ângulo são não adjacentes.



Daqui conclui-se que existem dois triângulos $[DEF]$ e $[PQR]$ com interiores disjuntos, cada um formado por vértices adjacentes do polígono com n lados e em que o ângulo E é menor que o ângulo Q. Visto que $\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{PQ} = \overline{QR}$, a desigualdade entre os ângulos E e Q implica que $\overline{DF} < \overline{PR}$. A partir de E e Q traçamos EG e QT perpendiculares respetivamente a DF e a PR.



Construímos o triângulo $[ET'P']$ congruente com o triângulo $[QTP]$. Agora consideramos o problema de Héron para a reta $T'G$ e os pontos P' e F. Seja S a solução do problema de Héron, em que S é o ponto em $T'G$ tal que a soma das distâncias $\overline{P'S}$ e $\overline{SF}$ seja mínima. Uma vez que a amplitude de $P'ET'$ (metade do ângulo Q) é maior que a do ângulo FEG (metade do ângulo E), o ponto S não coincide com E e S encontra-se no segmento $[EG]$. Agora vamos tomar na reta QT o segmento $[TU]$ de comprimento igual ao segmento $[T'S]$ e considerar os triângulos $[DSF]$ e $[PUR]$. A soma dos comprimentos dos lados desses triângulos é menor que a soma dos comprimentos dos lados dos triângulos originais $[DEF]$ e $[PQR]$, uma vez que

$$\overline{DS} + \overline{SF} + \overline{PU} + \overline{UR} = 2\left(\overline{SF} + \overline{SP'}\right) < 2\left(\overline{FE} + \overline{EP'}\right) = \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{PQ} + \overline{QR}.$$

Usámos o facto dos triângulos serem isósceles e de S ser a solução do problema de Héron. Por outro lado, a área do $\Delta[P'ES]$ é maior que a área do $\Delta[ESF]$, uma vez que as suas alturas são $\overline{P'T'} = \frac{1}{2}\overline{PR}$ e $\overline{FG} = \frac{1}{2}\overline{DF}$ e tínhamos mostrado que $\overline{DF} < \overline{PR}$. Em consequência, a soma das áreas dos triângulos $[DSF]$ e $[PUR]$ é maior que a soma das áreas dos triângulos $[DEF]$ e $[PQR]$.

De facto, temos

$$A_{\Delta[DSF]} + A_{\Delta[PUR]} = A_{\Delta[DEF]} - 2A_{\Delta[ESF]} + A_{\Delta[PQR]} + 2A_{\Delta[P'ES]} > A_{\Delta[DEF]} + A_{\Delta[PQR]}$$

Isto significa que o polígono $[DSF...PUR...]$ tem menor perímetro e maior área que o polígono original $[DEF...PQR...]$. Agora podemos tratar cada triângulo ($[DSF]$ ou $[PUR]$) como tratamos o triângulo $[P_1MP_3]$ na demonstração do Lema 3.1, assim podemos aumentá-lo para obter um polígono isoperimétrico com o polígono $[DEF...PQR...]$. Como a área do novo polígono é maior que a área do polígono $[DSF...PUR...]$, é certamente maior do que a área do polígono $[DEF...PQR...]$. Isto contradiz a hipótese do polígono $[DEF...PQR...]$ ter maior área e completa a demonstração do Lema 3.2 , assim como a do teorema de Zenodorus.

Pode-se mostrar que:

Lema 3.3 *De todos os polígonos com n lados existe um com área máxima.*

Em consequência dos lemas 3.1, 3.2 e 3.3, temos:

Teorema 3.4 *Um polígono de n lados e área máxima é regular.*

Podemos agora completar **a** resolução do problema isoperimétrico.

Seja p o perímetro de um polígono regular com n lados e A a sua área. Sabemos da geometria que $p = 2nRsen\left(\frac{\pi}{n}\right)$, onde R é o raio da circunferência circunscrita e $A = r\frac{p}{2}$, onde r é o raio da circunferência inscrita. Temos $r = R\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Juntando estes resultados , temos

$p^2 - 4Antg\left(\frac{\pi}{n}\right) = 0$.

O teorema 3.4 implica que se p é o perímetro de um polígono de n lados arbitrário e A a sua área, então

$$p^2 - 4Antg\left(\frac{\pi}{n}\right) \geq 0. \tag{3.1}$$

A inequação $tg\alpha \geq \alpha$ (válida para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) e (3.1) implica a desigualdade

$$p^2 - 4\pi A \geq 0, \tag{3.2}$$

para um polígono de n lados, qualquer que seja n .

Note-se que para qualquer círculo temos a igualdade

$$p^2 - 4\pi A = 0 \tag{3.3}$$

em que p é o perímetro do círculo e A a sua área.

É válido o seguinte resultado.

Lema 3.5 *Para cada curva fechada do plano de comprimento p^* envolvendo uma área A^* e para cada $\varepsilon > 0$, existe um polígono de n lados com perímetro p e área A, tal que*

$\left|p - p^*\right| < \varepsilon$, $\left|A - A^*\right| < \varepsilon$.

Consideremos então uma curva fechada do plano de comprimento p^*, envolvendo um área A^*.

O lema 3.5 e a relação (3.2) implicam que para cada ε existe um polígono de n lados com perímetro p e área A tal que

$$4\pi A^* \leq 4\pi A + 4\pi\varepsilon \leq p^2 + 4\pi\varepsilon \leq \left(p^* + \varepsilon\right)^2 + 4\pi\varepsilon = p^{*2} + \varepsilon\left(2p^* + 4\pi + \varepsilon\right).$$

Como ε é arbitrário, chegamos finalmente à desigualdade

$$4\pi A^* \leq p^{*2}.$$

Tal como visto em (3.3) temos uma igualdade no caso do círculo, o que mostra que área é máxima quando a curva é uma circunferência de perímetro p^*.

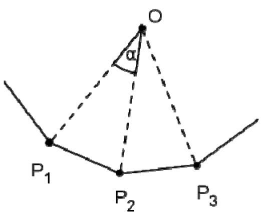
As considerações acima conduzem finalmente ao seguinte resultado.

Teorema 3.6 *A área envolvida por uma curva fechada arbitrária de comprimento dado não excede a área de um círculo de igual perímetro*.

Este resultado completa a resolução do problema isoperimétrico.

3.1. Área de um polígono regular em função do número de lados

Um polígono regular de n lados, com vértices P_1, P_2, …., P_n e perímetro p, pode ser decomposto em n triângulos isósceles iguais. A base de cada triângulo mede $\frac{p}{n}$ e o ângulo oposto à base $\alpha = \frac{2\pi}{n} rad$.



Designando por h a altura de cada um destes n triângulos, temos:

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\frac{p}{2n}}{h}\Leftrightarrow tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{p}{2nh}\Leftrightarrow h=\frac{p}{2ntg\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \text{ ou seja } h=\frac{p}{2ntg\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

$A_i=\dfrac{\frac{p}{n}\times\frac{p}{2ntg\left(\frac{\pi}{n}\right)}}{2}=\dfrac{p^2}{4n^2tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}$, em que A_i é a área do triângulo $[OP_iP_{i+1}]$, com $i=1,...,n-1$.

Assim a área de um polígono regular de n lados é dada em função de n, por

$$A(n)=\frac{p^2}{4n^2tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}\times n=\frac{p^2}{4ntg\left(\frac{\pi}{n}\right)} \qquad (3.4)$$

Teorema 3.3 Considerando todos os polígonos regulares de igual perímetro, tem maior área o que tiver maior número de lados.

Demonstração.

Para demonstrar este resultado vamos considerar a função de variável real $A(x)=\dfrac{p^2}{4xtg\left(\frac{\pi}{x}\right)}$, com

$x\geq 3$,

$$A'(x)=\left(\frac{p^2}{4xtg\left(\frac{\pi}{x}\right)}\right)'=-p^2\frac{\left(4tg\left(\frac{\pi}{x}\right)+\frac{4x\cdot\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right)}\right)}{\left(4xtg\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)^2}=-p^2\frac{\left(4x\cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right)tg\left(\frac{\pi}{x}\right)-4\pi\right)}{x\cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right)16x^2tg^2\left(\frac{\pi}{x}\right)}=$$

$$=-p^2\frac{\left(4x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)sen\left(\frac{\pi}{x}\right)-4\pi\right)}{16x^3sen^2\left(\frac{\pi}{x}\right)}=-p^2\frac{2xsen\left(\frac{2\pi}{x}\right)-4\pi}{16x^3sen^2\left(\frac{\pi}{x}\right)}=p^2\frac{2\pi-xsen\left(\frac{2\pi}{x}\right)}{8x^3sen^2\left(\frac{\pi}{x}\right)}$$

Interessa estudar o sinal do numerador, uma vez que $8x^3sen^2\left(\frac{\pi}{x}\right)>0,\quad \forall x\in[3,+\infty[$ e $p^2>0$

$$2\pi-xsen\left(\frac{2\pi}{x}\right)=x\left(\frac{2\pi}{x}-sen\left(\frac{2\pi}{x}\right)\right)\ ,\ \forall x\in[3,+\infty[$$

Seja a função de variável real $f(y)=y-seny$, com $y\geq 0$.

Como $f'(y)=1-\cos y$, vem $f'(y)\geq 0$.

$f(y)$ é crescente tendo como mínimo absoluto $f(0)=0$. Conclui-se que $f(y)\geq 0$, ou seja $y-seny\geq 0$.

Fazendo $y=\dfrac{2\pi}{x}$, vem $\dfrac{2\pi}{x}-sen\left(\dfrac{2\pi}{x}\right)\geq 0$.

Portanto $p^2\dfrac{2\pi-xsen\left(\dfrac{2\pi}{x}\right)}{8x^3sen^2\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}\geq 0$.

Como $A(x)$ é contínua e $A'(x)\geq 0$, podemos concluir que $A(x)$ é crescente para $x\geq 3$, pelo que a sucessão dada em (3.4) também é crescente para $n\geq 3$.

O resultado anterior permite-nos afirmar que para os polígonos regulares, quanto maior é o número de lados, maior a sua área. □

Estudando agora o limite de $A(n)$, temos:

$\lim\limits_{n\to+\infty} A(n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{p^2}{4ntg\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}$, fazendo a mudança de variável $y=\dfrac{1}{n}$, vem:

$$\lim_{y\to 0}\frac{p^2 y}{4tg(\pi y)}=\lim_{y\to 0}\frac{p^2 y\cos(\pi y)}{4\sin(\pi y)}=\frac{p^2}{4\pi} \tag{3.5}$$

Em qualquer círculo temos :

$P_{\bigcirc}=2\pi r$, donde $r=\dfrac{P_{\bigcirc}}{2\pi}$, logo $A_{\bigcirc}=\pi\left(\dfrac{P_{\bigcirc}}{2\pi}\right)^2=\dfrac{P_{\bigcirc}^{\ 2}}{4\pi}$

Por (3.5) concluímos que aumentando o número de lados do polígono regular, a sua área também aumenta tendendo para a área de um círculo de igual perímetro.

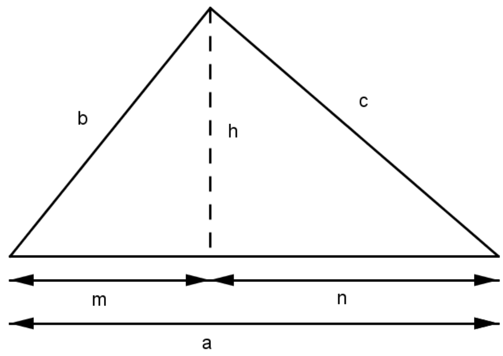
4. Área de uma região triangular

Fórmula 4.1 *(Héron)* Se os lados de um triângulo medirem a, b, c, a área do triângulo é dada por $A=\sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)}$, em que p é o perímetro do triângulo.

Demonstração.

Consideremos um triângulo de base a e lados b e c. Os lados b e c têm projeções ortogonais, indicadas por m e n, sobre o lado a.

Tomando h como a medida da altura do triângulo, relativa ao lado a, segue-se que a área da região triangular será dada por $A=\frac{a \cdot h}{2}$. Temos a formação de mais dois pequenos triângulos retângulos e com eles podemos extrair as três relações:



$b^2=m^2+h^2$ (4.1)

$c^2=n^2+h^2$ (4.2)

$a=m+n$ (4.3)

Subtraindo (4.2) a (4.1) vem: $b^2-c^2=m^2-n^2=(m+n)(m-n)$. Usando (4.3) podemos escrever $b^2-c^2=a(m-n)$, ou de forma equivalente:

$$m-n=\frac{b^2-c^2}{a} \qquad (4.4)$$

De (4.3) e (4.4) obtemos:

$$2m=\frac{b^2-c^2}{a}+a \Leftrightarrow m=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a} \text{ e } 2n=\frac{c^2-b^2}{a}+a \Leftrightarrow n=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$$

Como $a+b+c=p$, obtemos:

$$a+b-c=a+b+c-2c=p-2c$$

$$a+c-b=a+b+c-2b=p-2b$$

$$b+c-a=a+b+c-2a=p-2a$$

Tendo presente que $A^2 = \dfrac{a^2 \cdot h^2}{4}$, vamos em primeiro lugar estabelecer o valor da expressão a^2h^2

De (4.1) vem

$$a^2h^2 = a^2\left(b^2 - m^2\right) = a^2\left(b - m\right)\left(b + m\right)$$

Substituindo m e n, obtemos:

$$\frac{a^2h^2}{4} = \frac{1}{4}a^2\left(b + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)\left(b - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right) = \frac{1}{4}a^2\left(\frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)\left(\frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\left(2ab + a^2 + b^2 - c^2\right)\left(2ab - a^2 - b^2 + c^2\right) = \frac{1}{16}\left[\left(a+b\right)^2 - c^2\right]\left[c^2 - \left(a-b\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{16}\left(a+b+c\right)\left(a+b-c\right)\left(c+a-b\right)\left(c-a+b\right) = \frac{1}{16}p\cdot\left(p-2c\right)\cdot\left(p-2b\right)\cdot\left(p-2a\right) =$$

$$= \frac{p}{2}\cdot\left(\frac{p-2c}{2}\right)\cdot\left(\frac{p-2b}{2}\right)\cdot\left(\frac{p-2a}{2}\right) = \frac{p}{2}\cdot\left(\frac{p}{2} - c\right)\cdot\left(\frac{p}{2} - b\right)\cdot\left(\frac{p}{2} - a\right)$$

Donde se conclui que

$A^2 = \dfrac{p}{2}\cdot\left(\dfrac{p}{2} - a\right)\cdot\left(\dfrac{p}{2} - b\right)\cdot\left(\dfrac{p}{2} - c\right)$ e consequentemente

$$A = \sqrt{\frac{p}{2}\cdot\left(\frac{p}{2} - a\right)\cdot\left(\frac{p}{2} - b\right)\cdot\left(\frac{p}{2} - c\right)} \ \square$$

4.1. Triângulo de área máxima e perímetro fixo

De todos os triângulos com um dado perímetro $p > 0$, quais são aqueles de maior área?

4.1.1. Estudo usando uma função de uma só variável

Em primeiro lugar vamos considerar o problema de determinar os triângulos com maior área, tendo perímetro p e um dos lados de comprimento dado.

Admitindo que um dos lados mede a e é dado, e os outros suponhamos que medem b e c.
Como o perímetro é p, temos $p = a + b + c$, mas como o perímetro também é dado, ficamos com $b + c = k$, em que k é uma constante.
Mas $k = p - a \Leftrightarrow a = p - k$.

Pretendemos maximizar a área do triângulo, ou seja a função $A=\sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)}$, pela fórmula de Héron. A é uma função contínua em $\left[0,\frac{p}{2}\right]$ logo atinge um máximo absoluto neste intervalo.

Como $A\geq 0$, maximizar A será igual a maximizar A^2, ou seja maximizar $A^2=\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)$.

Substituindo os valores de a e c, temos:

$$A^2(b)=\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-(p-k)\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-(k-b)\right)\Leftrightarrow A^2(b)=\frac{p}{2}\left(k-\frac{p}{2}\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-k+b\right)$$

$$\Leftrightarrow A^2(b)=\left(\frac{p}{2}k-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-k+b\right)\Leftrightarrow A^2(b)=\left(\frac{p}{2}k-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right)\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p}{2}k+bk-b^2\right)$$

Derivando obtemos: $\left(A^2\right)'(b)=\left(\frac{p}{2}k-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right)(k-2b)$

$$\left(A^2\right)'(b)=0\Leftrightarrow\left(\frac{p}{2}k-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right)(k-2b)=0\Leftrightarrow 2b=k\vee\frac{pk}{2}-\frac{p^2}{4}=0\Leftrightarrow b=\frac{k}{2}\vee\frac{p}{2}\left(k-\frac{p}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow b=\frac{k}{2}\vee\frac{p}{2}=0\vee\frac{p}{2}=k\Leftrightarrow b=\frac{k}{2}\vee p=0\vee p=2k$$

$p=0$ é uma condição impossível, uma vez que p é o perímetro do triângulo.

$k=\frac{p}{2}\Leftrightarrow p-a=\frac{p}{2}\Leftrightarrow a=\frac{p}{2}$, o que também é impossível pela desigualdade triangular.

Portanto

$$\left(A^2\right)'(b)=0\Leftrightarrow b=\frac{k}{2}$$

$$\left(A^2\right)''(b)=-2\left(\frac{p}{2}k-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right)=-pk+\frac{p^2}{2}=p\left(\frac{p}{2}-k\right)$$

Pela desigualdade triangular tem-se $a<b+c\Leftrightarrow p-k<k\Leftrightarrow p<2k\Leftrightarrow k>\frac{p}{2}$ de onde se conclui que $\left(A^2\right)''\left(\frac{k}{2}\right)<0$ e portanto a função $A^2(b)$ tem um máximo para $b=\frac{k}{2}$.

Trata-se de um máximo absoluto de A^2 em $\left[0,\dfrac{p}{2}\right]$ uma vez que $A^2\left(0\right)=A^2\left(\dfrac{p}{2}\right)=0$.

Nesse caso, como $b+c=k$, temos $b+c=2b$, ou seja $b=c$.
Concluímos que o triângulo é isósceles.

Consideremos agora um triângulo de perímetro p e área máxima. Pelo que foi visto anteriormente este triângulo é isósceles, digamos que tem base a e lados b.

Como $perímetro=p=a+2b$, temos $a=p-2b \Leftrightarrow \dfrac{a}{2}=\dfrac{p}{2}-b$.

Aplicando a Fórmula de Héron vem $A\left(a\right)=\sqrt{\dfrac{p}{2}\left(\dfrac{p}{2}-a\right)\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{a}{2}}=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}\dfrac{p}{2}\left(\dfrac{p}{2}-a\right)}=\sqrt{\dfrac{a^2p^2}{16}-\dfrac{a^3p}{8}}$,

que é uma função contínua na variável a, $a\in\left[0,\dfrac{p}{2}\right]$.

Derivando $A^2\left(a\right)$, obtemos $\left(A^2\right)'\left(a\right)=\dfrac{a}{8}p^2-3\dfrac{a^2}{8}p$.

Calculando os pontos de estacionaridade de $A^2\left(a\right)$ temos

$$\left(A^2\right)'\left(a\right)=0\Leftrightarrow\frac{a}{8}p^2-3\frac{a^2}{8}p=0\Leftrightarrow\frac{a}{8}p\left(p-3a\right)=0\Leftrightarrow\frac{a}{8}p=0\vee 3a=p\Leftrightarrow a=\frac{p}{3}$$

O único ponto de estacionaridade é $a=\dfrac{p}{3}$ e

$\left(A^2\right)''\left(a\right)=\dfrac{p^2}{8}-\dfrac{a}{4}p$ temos $\left(A^2\right)''\left(\dfrac{p}{3}\right)=\dfrac{p^2}{8}-\dfrac{p^2}{4}=-\dfrac{p^2}{8}<0$

ou seja, $a=\dfrac{p}{3}$ é maximizante de $A^2\left(a\right)$.

$A^2\left(\dfrac{p}{3}\right)=\dfrac{p^4}{432}$, $A^2\left(0\right)=A^2\left(\dfrac{p}{2}\right)=0$ logo $A^2\left(\dfrac{p}{3}\right)$ é o máximo absoluto de A^2 em $\left[0,\dfrac{p}{2}\right]$.

Para $a=\dfrac{p}{3}$ temos $perímetro=p=a+2b\Leftrightarrow a+2b=3a\Leftrightarrow a=b$

pelo que se concluí que o triângulo é equilátero.

4.1.2. Estudo usando uma função de duas variáveis

Dado um triângulo de perímetro fixo, digamos p, e lados a, b, c, que relação deve existir entre os lados para que a área triângulo seja máxima?

Pela fórmula de Héron sabemos que área é dada por $A=\sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)}$, mas maximizar A é equivalente a maximizar $A^2=\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)$.

Como o perímetro é p, temos $a+b+c=p \Leftrightarrow c=p-a-b$. Assim o que pretendemos maximizar é a função de duas variáveis a e b, dada por $f(a,b)=\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-(p-a-b)\right)=\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(a+b-\frac{p}{2}\right)$ definida em $D=\left[0,\frac{p}{2}\right]\times\left[0,\frac{p}{2}\right]$.

Note-se que f é contínua logo atinge um máximo absoluto neste domínio. Na fronteira de D tem-se $f=0$.

Calculemos as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial a}=-\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(a+b-\frac{p}{2}\right)+\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)=\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-b\right)(p-2a-b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial b}=-\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(a+b-\frac{p}{2}\right)+\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)=\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)(p-2b-a)$$

$$\nabla f(a,b)=\begin{bmatrix}\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-b\right)(p-2a-b)\\ \frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)(p-2b-a)\end{bmatrix}$$

$$\nabla f(a,b)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-b\right)(p-2a-b)=0\\ \frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)(p-2b-a)=0\end{cases}$$

Da 1ª equação vem $p=0 \vee p=2b \vee b=p-2a$

$p=0$ é impossível, porque nesse caso o triângulo teria perímetro 0.

$p=2b \Leftrightarrow a+c=b$, o que é impossível pela desigualdade triangular.

Substituindo $b=p-2a$ na outra equação, obtemos:

$$\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(p-2\left(p-2a\right)-a\right)=0 \Leftrightarrow \frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(p-2p+4a-a\right)=0 \Leftrightarrow p=0 \vee p=2a \vee a=\frac{p}{3}$$

Mas como vimos $p=0$ é impossível.

Se $p=2a$, vem $b=0$, tendo-se $f\left(a,0\right)=0$.

Resta-nos o caso em que $a=\dfrac{p}{3}$, donde se conclui que $b=\dfrac{p}{3}$. Portanto o único candidato a extremo de f no interior de D é o par $\left(a,b\right)=\left(\dfrac{p}{3},\dfrac{p}{3}\right)$.

Calculemos então as derivadas de 2ª ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}=-p\left(\frac{p}{2}-b\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}=-p\left(\frac{p}{2}-a\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a\partial b}=-\frac{p}{2}\left(p-2b-a\right)-\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)=-\frac{p}{2}\left(3\frac{p}{2}-2a-2b\right)$$

$$H\left(\frac{p}{3},\frac{p}{3}\right)=\begin{bmatrix} -p\left(\frac{p}{2}-\frac{p}{3}\right) & -\frac{p}{2}\left(3\frac{p}{2}-2\cdot\frac{p}{3}-2\cdot\frac{p}{3}\right) \\ -\frac{p}{2}\left(3\frac{p}{2}-2\cdot\frac{p}{3}-2\cdot\frac{p}{3}\right) & -p\left(\frac{p}{2}-\frac{p}{3}\right) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{-p^2}{6} & \frac{-p^2}{12} \\ \frac{-p^2}{12} & \frac{-p^2}{6} \end{bmatrix}$$

$$\left|H\left(\frac{p}{3},\frac{p}{3}\right)\right|=\begin{vmatrix} \frac{-p^2}{6} & \frac{-p^2}{12} \\ \frac{-p^2}{12} & \frac{-p^2}{6} \end{vmatrix}=\frac{p^4}{36}-\frac{p^4}{144}>0$$

Como $\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}\left(\frac{p}{3},\frac{p}{3}\right)=-\frac{p^2}{6}<0$ e $\left|H\left(\frac{p}{3},\frac{p}{3}\right)\right|>0$, concluímos que $f(a,b)$ tem um máximo local para $(a,b)=\left(\frac{p}{3},\frac{p}{3}\right)$.

Como $f\left(\frac{p}{3},\frac{p}{3}\right)=\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-\frac{p}{3}\right)^2\left(\frac{2p}{3}-\frac{p}{2}\right)=\frac{p}{2}\left(\frac{p}{6}\right)^3>0$ trata-se do máximo absoluto de f em D.

Uma vez que $c=p-a-b=\frac{p}{3}$, concluímos que o triângulo de perímetro p com maior área é o triângulo equilátero de lado $\frac{p}{3}$.

5. As abelhas e a matemática

As abelhas são uns seres muito curiosos a nível organizacional, na complexidade de meios de comunicação usam, que lhes permite por exemplo a sinalização perfeita dos locais ótimos de colheita de pólen. No que toca à produção de mel e cera, a construção dos favos também parece obedecer a um plano elaborado com base em cálculos matemáticos.

O estudo dos alvéolos das abelhas suscitou o interesse de vários sábios, como por exemplo Pappus de Alexandria e Johannes Kepler. Pappus de Alexandria (320 d.C.) foi o primeiro a interessar-se pelo problema e estudou alvéolos em forma de prismas de secção triangular, quadrada e hexagonal, concluindo que o hexagonal poderia armazenar mais mel dos que os outros dois.

Easmus Bartholin, pelo que se conhece, foi o primeiro a admitir a hipótese que o trabalho das abelhas nada tinha a ver com uma questão de economia, mas que resultava da impossibilidade de construírem paredes que não fossem planas, devido à pressão exercida por outras abelhas.

Johannes Kepler deduziu, a partir dum estudo de ocupação do espaço, que todos os ângulos diedros deveriam ser de 120º.

Cerca de 1700, René Antoine Ferchault (1683-1757), famoso físico francês, defendeu que se tratava de um problema de máximo e de mínimo, que as abelhas resolveriam com o intuito de minimizar a utilização de cera. Para além de usar a forma hexagonal, o fundo de cada alvéolo é constituído por três losangos iguais, formando uma base poliédrica convexa. Este tipo de fundo, em vez de fundo plano, permite economizar um alvéolo em cada cinquenta, que em milhões e milhões de alvéolos representa uma economia incalculável.

René constatou que o ângulo agudo dos losangos do fundo do alvéolo era constante. Esse facto levou-o a investigar alvéolos da Alemanha, Suiça, Inglaterra e Canadá e todos apresentavam losangos com o mesmo ângulo. Dominique Maraldi (1709-1788) mediu com maior precisão o tal ângulo agudo e achou 70º 32’ em todos os alvéolos. Então, intrigado, René decidiu consultar o seu amigo e notável matemático Samuel Köing (1712-1757), propondo-lhe o seguinte problema:

É dado um prisma hexagonal regular. Esse prisma é fechado numa das suas extremidades por três losangos iguais. Pergunta-se: Qual deve ser o ângulo desse losango de modo que se obtenha para o prisma um volume máximo com a maior economia de material?

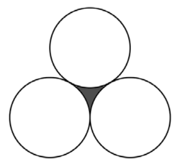
Köing desconhecia as pesquisas feitas pelo seu amigo René e o trabalho de Maraldi, resolveu o problema, afirmando que o ângulo dos losangos era 70º 34’. A comunidade científica francesa ficava impressionada, as abelhas erravam, mas o seu erro mínimo. Aliás o erro do ângulo, em dois minutos, só poderia ser apreciado com instrumentos de precisão.

Mas o facto mais impressionante resultou de um estudo de um matemático inglês, Colin Mac-Laurin (1698-1746), que retomou o problema e o resolveu com recurso a cálculo diferencial concluindo que o ângulo do losango que tornava o alvéolo mais económico deveria medir 70º 32’, ou seja as abelhas estavam certas. Mac- Laurin defendeu Köing, afirmando que este tinha errado devido ao uso de uma tábua de logaritmos que continha um erro e indicou onde estava o erro. Provava-se então que as abelhas resolviam um problema de alta matemática.

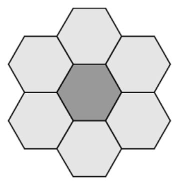
5.1. Porque é que os alvéolos das abelhas são hexagonais?

Os favos são construídos com a cera que as abelhas produzem, pelo que visam construir um número máximo de alvéolos, gastando o mínimo possível de cera.

No século XVIII Réamur afirmava que as abelhas resolviam um grande problema cuja solução era difícil para os matemáticos da época: *“No menor espaço, construir células regulares e iguais, com a maior capacidade e solidez, empregando a menor quantidade de matéria possível.”*

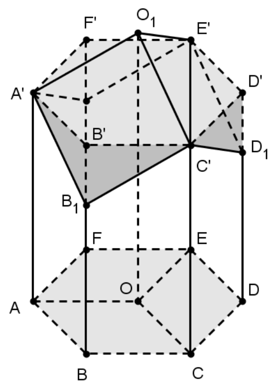


Se pensássemos num favo isolado, o problema não é mais do que um problema isoperimétrico, cuja solução é, como sabemos, o círculo. O que levará então as abelhas a optarem pelos hexágonos regulares em detrimento dos círculos? A primeira razão que salta à vista prende-se com a necessidade de justapor os favos e se estes tivessem a forma de círculo, haveria entre eles espaço desperdiçado. Abandonado o círculo, a opção iria recair num polígono regular que permitisse a pavimentação do plano, que permitisse cobri-lo sem deixar espaços vazios nem havendo sobreposição. Tal condição implicava que o ângulo interno deveria ser um divisor de 360º, pelo que as hipóteses possíveis seriam o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular. Como visto anteriormente, de todos os polígonos regulares com igual perímetro, tem maior área o que possuir maior número de lados. Por conseguinte a escolha das abelhas só poderia ser o hexágono regular. De facto, como com qualquer polígono que permita pavimentar, ao usarem hexágonos cada parede é partilhada por dois favos. No esquema ao lado podemos perceber que ao construir todos os favos em redor, as abelhas ganham o favo do meio sem usarem nenhuma quantidade adicional de cera.



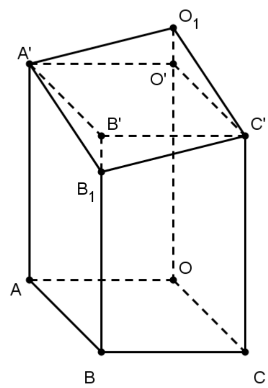
5.2. Porque razão o fundo dos alvéolos não é plano?

O fundo dos alvéolos não é plano, mas sim formado por três losangos de ângulo constante.



Para determinar o volume e área vamos seccionar o alvéolo segundo os planos $AA'O$ e $CC'O$ obtendo o sólido $[ABCOA'B_1C'O_1]$ que corresponde a um terço do inicial.

Admitindo que o lado do hexágono da base mede l e o lado do losango do topo mede x, temos:



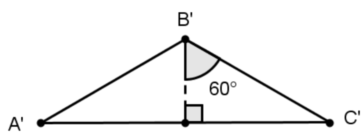
$\overline{O'O_1}^2 = x^2 - l^2$ e $\overline{B'B_1}^2 = x^2 - l^2$ pelo que como $\overline{O'O_1} \geq 0$ e $\overline{B'B_1} \geq 0$, podemos concluir que $\overline{O'O_1} = \overline{B'B_1}$.

Assim podemos afirmar que o volume do sólido $[A'B'C'O'O_1]$ é igual ao volume do sólido $[A'O'C'B'B_1]$, donde se conclui que o volume do prisma truncado $[ABCOA'B_1C'O_1]$ é igual ao volume do prisma $[ABCOA'B'C'O']$.

Isto significa que o volume do prisma truncado não depende do ângulo do losango do topo.

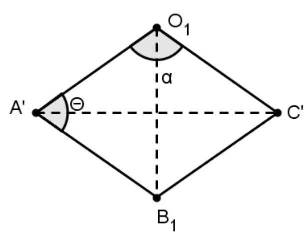
Determinar a área do losango $[A'O_1C'B_1]$

Considerando o triângulo $[A'B'C']$, temos



$$sen60^o = \frac{\frac{\overline{A'C'}}{2}}{l} \Leftrightarrow \overline{A'C'} = \sqrt{3}l$$

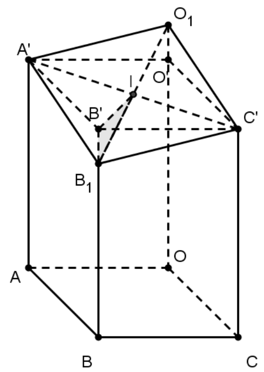
$$tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\frac{\overline{O_1B_1}}{2}}{\frac{\overline{A'C'}}{2}} \Leftrightarrow \overline{O_1B_1} = \overline{A'C'} \cdot tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{3}l \cdot tg\left(\frac{\theta}{2}\right)$$



com $0 < \theta < \pi$ e $0 < \alpha < \pi$

$$A_{[A'O_1C'B_1]} = \frac{\overline{A'C'} \times \overline{O_1B_1}}{2} = \frac{3}{2} l^2 \cdot tg\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Área do trapézio $\left[BCC'B_1\right]$



Vamos designar por I, o ponto de interseção das diagonais do losango $\left[A'O_1C'B_1\right]$. O ponto I é o ponto médio de $\left[A'C'\right]$, como tal, o ponto I é também a interseção das diagonais do losango $\left[A'O'C'B'\right]$.

Considerando o triângulo retângulo em B', $\left[B_1B'I\right]$, temos pelo teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{\overline{O_1B_1}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\overline{B'O'}}{2}\right)^2 + \overline{B'B_1}^2 \Leftrightarrow \overline{B'B_1}^2 = \frac{3l^2}{4} \cdot tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{l^2}{4} \Leftrightarrow \overline{B'B_1}^2 = \frac{l^2}{4}\left(3tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right)$$

e como $\overline{B'B_1} \geq 0$, vem

$$\overline{B'B_1} = \frac{l}{2}\sqrt{3tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1}.$$

Da igualdade $\overline{B'B_1}^2 = \frac{l^2}{4}\left(3tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right)$ resulta que $3tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \geq 0$ ou seja que $tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \geq \frac{1}{3}$.

Mas como $0 < \theta < \pi$, vem $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ e temos $tg\left(\frac{\theta}{2}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} \geq \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \theta \geq \frac{\pi}{3}$, portanto

$\frac{\pi}{3} \leq \theta < \pi$.

Então a área do trapézio $\left[BCC'B_1\right]$ é

$$A_{[BCC'B_1]} = \frac{\overline{BB_1} + \overline{CC'}}{2} \times \overline{BC} = \frac{h - \overline{B'B_1} + h}{2} \times l = \frac{2h - \frac{l}{2}\sqrt{3tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1}}{2} \times l =$$

$= \frac{l}{2}\left(2h - \frac{l}{2}\sqrt{3tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1}\right)$ onde estamos a usar $h = \overline{CC'}$.

Área total do alvéolo

$$A(\theta) = 6A_{[BCC'B_1]} + 3A_{[A'O_1C'B_1]} = 3l\left(2h - \frac{l}{2}\sqrt{3tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1}\right) + \frac{9}{2} l^2 \cdot tg\left(\frac{\theta}{2}\right),\ \frac{\pi}{3} \leq \theta < \pi$$

Cálculo do mínimo

derivando em ordem a θ

$$A'(\theta)=-\frac{3l^2}{2}\times\frac{\left(3tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1\right)'}{2\sqrt{3tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1}}+\frac{9l^2}{4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}=-\frac{3l^2}{4}\times\frac{\frac{3sen\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\sqrt{3tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1}}+\frac{9l^2}{4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}=$$

$$=-\frac{9l^2}{4}\times\frac{sen\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{3tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1}}+\frac{9l^2}{4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{9l^2}{4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\left(1-\frac{tg\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{3tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1}}\right)\quad,\frac{\pi}{3}<\theta<\pi$$

igualando a zero

$$A'(\theta)=0\Leftrightarrow\frac{9l^2}{4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\left(1-\frac{tg\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{3tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1}}\right)=0\Leftrightarrow\frac{tg\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{3tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1}}=1$$

$$\Leftrightarrow tg\left(\frac{\theta}{2}\right)=\sqrt{3tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1}\,,$$

como $\frac{\pi}{6}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$ os dois membros da equação anterior são positivos e elevando ambos ao quadrado temos

$$tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=3tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1\Leftrightarrow 2tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=1\Leftrightarrow tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow tg\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\frac{\theta}{2}=\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Leftrightarrow\theta=2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Leftrightarrow\theta\simeq 1,23\ rad\Leftrightarrow\theta\simeq 70^{\circ}32'$$

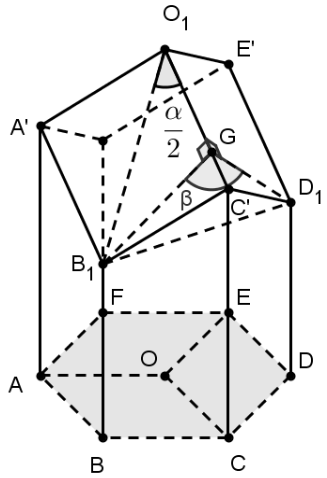
θ	$\frac{\pi}{3}$		$2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$		π
$A'(\theta)$		–	0	+	
$A(\theta)$		↘	mínimo	↗	

Como $A(\theta)=3l\left(2h-\frac{l}{2}\sqrt{3tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1}\right)+\frac{9}{2}l^2\cdot tg\left(\frac{\theta}{2}\right)$ obtemos o valor mínimo da área

$$A\left[2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=3l\left(2h-\frac{l}{2}\sqrt{3\times\frac{1}{2}-1}\right)+\frac{9}{2}l^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=6hl+\frac{3\sqrt{2}}{2}l^2.$$

Caso a base fosse plana área total seria $A=6hl+\frac{3\sqrt{3}}{2}l^2$ e como tal comprova-se que usando a base com losangos a área é menor.

5.2.1. Cálculo do ângulo diedro dos losangos, quando a área é mínima.



Seja β o ângulo diedro dos losangos.

Tomando o triângulo retângulo $[O_1GB_1]$, temos:

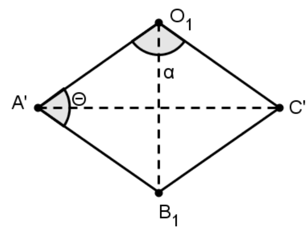
$$sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\overline{GB_1}}{\overline{O_1B_1}}$$

Conforme visto anteriormente,

$$\overline{O_1B_1}=\sqrt{3}l\cdot tg\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Quando a área é mínima, $tg\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, logo vem $\overline{O_1B_1}=\frac{\sqrt{6}l}{2}$.

Também já sabemos que:



$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\frac{\overline{A'C'}}{2}}{\frac{\overline{O_1B_1}}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l}{\frac{\sqrt{6}}{4}l}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

donde sai $cotg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Aplicando uma variante da fórmula fundamental da trigonometria temos:

$$1+\operatorname{cotg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\Leftrightarrow 1+\frac{1}{2}=\frac{1}{sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\Leftrightarrow sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{2}{3}.$$

Como $0<\alpha<\pi$, temos $sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Então

$$\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\overline{GB_1}}{\frac{\sqrt{6}l}{2}} \Leftrightarrow \overline{GB_1}=\frac{\sqrt{6}l}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow \overline{GB_1}=l\,.$$

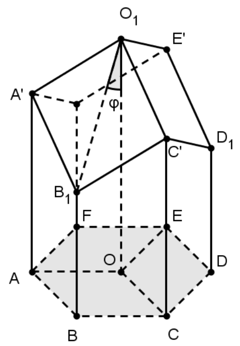
Tomando agora o triângulo isósceles $\left[B_1GD_1\right]$, concluímos, uma vez que os pontos B_1 e D_1 pertencem a um plano paralelo à base, que $\overline{B_1D_1}=\overline{BD}=\overline{A'C'}=\sqrt{3}l$, donde

$$sen\left(\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\frac{\overline{B_1D_1}}{2}}{\overline{B_1G}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l}{l}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

e como $0<\beta<\pi$, temos $\frac{\beta}{2}=60^{\text{o}} \Leftrightarrow \beta=120^{\text{o}}$.

O ângulo efetuado pelos losangos que permite otimizar a área é, tal como Kepler tinha afirmado, 120º.

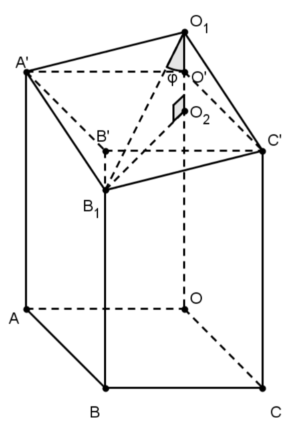
5.2.2. Ângulo de inclinação dos losangos do topo



Nas condições que garantem a área mínima do alvéolo, podemos calcular a amplitude do ângulo que os losangos do topo fazem com a altura do alvéolo.

Designando por φ o ângulo pretendido e aplicando a trigonometria, temos

$sen\varphi=\frac{\overline{B_1O_2}}{\overline{B_1O_1}}=\frac{\overline{BO}}{\overline{B_1O_1}}$, conforme figura ao lado.



De cálculos feitos anteriormente, quando a área é mínima sabemos que

$$\overline{O_1B_1}=\frac{\sqrt{6}}{2}l\,,$$

donde

$$sen\varphi=\frac{l}{\frac{\sqrt{6}}{2}l} \Leftrightarrow sen\varphi=\frac{2}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow sen\varphi=\frac{\sqrt{6}}{3}\,,$$

pelo que $\varphi \simeq 54,736^{\text{o}}$.

6. Produto máximo

6.1. Soma fixa

Problema 6.1 - *Dados dois números reais não negativos x e y com soma fixa, qual será o seu produto máximo?*

6.1.1. Estudo usando uma função de uma só variável.

Digamos que $x+y=c$, em que c é uma constante positiva de $\mathbb{R}$.

Pretendemos maximizar $p=xy$, mas como $y=c-x$, a função a maximizar vem $p(x)=x(c-x)=cx-x^2$, $x\in[0,c]$.

Como a função $p(x)$ é contínua pelo teorema de Weierstrass sabemos que a função tem um máximo e mínimo absolutos em $[0,c]$.

Derivando obtemos $p'(x)=c-2x$, $0<x<c$.

$$p'(x)=0 \Leftrightarrow c-2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{c}{2}$$

Como $p(0)=p(c)=0$ e $p\left(\frac{c}{2}\right)=c\cdot\frac{c}{2}-\left(\frac{c}{2}\right)^2=\frac{c^2}{4}$,

concluímos que a função tem mínimo absoluto igual a 0, em $x=0$ e $x=c$ e máximo absoluto igual a $\frac{c^2}{4}$ em $x=\frac{c}{2}$.

Como $y=c-\frac{c}{2}=\frac{c}{2}$, concluímos que, nas condições do enunciado, o produto é máximo quando os números forem iguais.

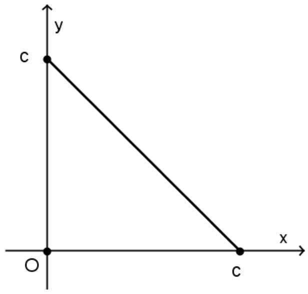
6.1.2. Estudo usando uma função de duas variáveis

Vamos agora resolver o mesmo problema trabalhando com funções de duas variáveis e aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange.

Seja $g(x,y)=x+y-c$. Vamos determinar os extremos de $p(x,y)=x\cdot y$, com as variáveis x e y sujeitas à condição $g(x,y)=0$.

Consideramos a função $P(x,y)=xy+\lambda(x+y-c)$, e o sistema $\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial P}{\partial y}=0\\ g(x,y)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+\lambda=0\\ x+\lambda=0\\ x+y=c\end{cases}$

Da 1ª equação sai que $\lambda=-y$, substituindo na 2ª obtemos $x=y$. Substituindo agora na 3ª equação obtemos $x=\dfrac{c}{2}$. E portanto o par $(x,y)=\left(\dfrac{c}{2},\dfrac{c}{2}\right)$ é o único ponto de estacionaridade de $P(x,y)$ que satisfaz $g(x,y)=0$.



Como as variáveis x e y estão sujeitas à condição $g(x,y)=0$, a função $p(x,y)$ fica restrita a um segmento de reta no 1º quadrante cujos extremos têm coordenadas $(0,c)$ e $(c,0)$. Pelo teorema de Weierstrass, como a função p é contínua num conjunto limitado e fechado ela possui máximo nesse conjunto.

Como $p(0,c)=p(c,0)=0$ e $p\left(\dfrac{c}{2},\dfrac{c}{2}\right)=\dfrac{c^2}{4}$, concluímos que a função tem um máximo igual $\dfrac{c^2}{4}$ para $(x,y)=\left(\dfrac{c}{2},\dfrac{c}{2}\right)$.

6.2. Soma dos quadrados fixa

Problema 6.2 **-** *Dados dois números reais x e y com soma dos seus quadrados fixa, qual será o seu produto máximo?*

6.2.1. Estudo usando uma função de uma só variável

Digamos que $x^2+y^2=c^2$, em que c é uma constante positiva de $\mathbb{R}$.

Pretendemos maximizar $p=xy$

Fazendo

$x=c\cdot\cos t$ e $y=c\cdot sent$, com $t\in[0,2\pi]$, a função a maximizar será

$$p(t)=c^2\cos t\cdot \operatorname{sen} t=\frac{c^2}{2}\operatorname{sen}(2t),\ t\in[0,2\pi]$$

Como p é contínua e $t\in[0,2\pi]$, pelo teorema de Weierstrass a função p tem mínimo e máximo absolutos em $[0,2\pi]$.

$$p'(t)=c^2\cos(2t),\ t\in\,]0,2\pi[$$

$$p'(t)=0\wedge t\in\,]0,2\pi[\Leftrightarrow c^2\cos(2t)=0\wedge t\in\,]0,2\pi[\Leftrightarrow 2t=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\wedge t\in\,]0,2\pi[$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\wedge t\in\,]0,2\pi[\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{4}\vee t=\frac{3\pi}{4}\vee t=\frac{5\pi}{4}\vee t=\frac{7\pi}{4}$$

Calculando os valores da função nos pontos fronteiros do intervalo temos,

$$p(0)=\frac{c^2}{2}\operatorname{sen}(0)=0$$

$$p(2\pi)=\frac{c^2}{2}\operatorname{sen}(2\pi)=0$$

Por outro lado $p\left(\frac{\pi}{4}\right)=p\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{c^2}{2}$ e $p\left(\frac{3\pi}{4}\right)=p\left(\frac{7\pi}{4}\right)=-\frac{c^2}{2}$, donde se concluí que a função tem máximo absoluto igual a $\frac{c^2}{2}$ em $t=\frac{\pi}{4}$ ou $t=\frac{5\pi}{4}$ e mínimo absoluto igual a $-\frac{c^2}{2}$ em $t=\frac{3\pi}{4}$ ou $t=\frac{7\pi}{4}$.

Para $t=\frac{\pi}{4}$, temos $x=\frac{\sqrt{2}}{2}c$ e $y=\frac{\sqrt{2}}{2}c$

e para $t=\frac{5\pi}{4}$ obtemos os seus valores simétricos, $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}c$ e $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}c$.

6.2.2. Estudo usando uma função de duas variáveis

De forma análoga seja agora $g(x,y)=x^2+y^2-c^2$ e vamos determinar os extremos de $p(x,y)=x\cdot y$, com as variáveis x e y sujeitas à condição $g(x,y)=0$.

O facto das variáveis estarem sobre uma circunferência e de p ser uma função contínua garante-nos pelo teorema de Weierstrass que a função tem um máximo e um mínimo absolutos no conjunto $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : g(x,y)=0\}$.

Consideramos a função $P(x,y) = xy + \lambda\left(x^2 + y^2 - c^2\right)$, e o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2\lambda x = 0 \\ x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = c^2 \end{cases}$$

Se $x=0$, da 1ª equação saía que $y=0$. Então pela 3ª equação concluímos que $c=0$, o que contradiz a hipótese.

Como $x \neq 0$, da 1ª equação sai que $\lambda = \dfrac{-y}{2x}$, substituindo na 2ª equação

$$\begin{cases} \lambda = -\dfrac{y}{2x} \\ x - 2\dfrac{y}{2x} \cdot y = 0 \\ x^2 + y^2 = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{y}{2x} \\ x - \dfrac{y^2}{x} = 0 \\ x^2 + y^2 = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{y}{2x} \\ x^2 = y^2 \\ x^2 + y^2 = c^2 \end{cases}$$

obtemos $x^2 = y^2$. Substituindo agora na 3ª equação obtemos $x^2 = \dfrac{c^2}{2}$, ou seja $x = \pm\dfrac{c}{\sqrt{2}}$.

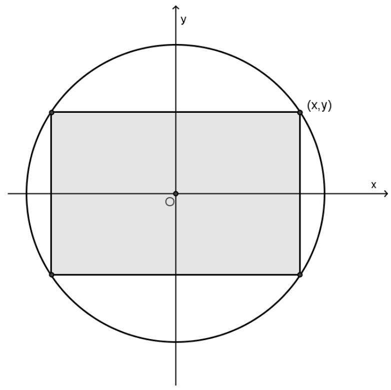
Se $x = \dfrac{c}{\sqrt{2}}$, $y = \pm\dfrac{c}{\sqrt{2}}$ e se $x = -\dfrac{c}{\sqrt{2}}$, obtemos igualmente $y = \pm\dfrac{c}{\sqrt{2}}$.

Então os pares ordenados $\left(\dfrac{c}{\sqrt{2}},\dfrac{c}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\dfrac{c}{\sqrt{2}},-\dfrac{c}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\dfrac{c}{\sqrt{2}},\dfrac{c}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-\dfrac{c}{\sqrt{2}},-\dfrac{c}{\sqrt{2}}\right)$, são os pontos de estacionaridade de $P(x,y)$ que satisfazem $g(x,y)=0$.

Calculando as imagens da função nos pontos de estacionaridade, temos $p\left(\dfrac{c}{\sqrt{2}},\dfrac{c}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{c^2}{2} = p\left(-\dfrac{c}{\sqrt{2}},-\dfrac{c}{\sqrt{2}}\right)$ e $p\left(-\dfrac{c}{\sqrt{2}},\dfrac{c}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{c^2}{2} = p\left(\dfrac{c}{\sqrt{2}},-\dfrac{c}{\sqrt{2}}\right)$,

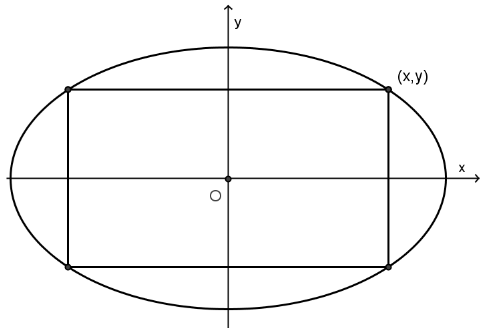
donde se conclui que a função atinge máximos nos pontos de coordenadas $\left(\dfrac{c}{\sqrt{2}},\dfrac{c}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-\dfrac{c}{\sqrt{2}},-\dfrac{c}{\sqrt{2}}\right)$ e mínimos nos pontos de coordenadas $\left(-\dfrac{c}{\sqrt{2}},\dfrac{c}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(\dfrac{c}{\sqrt{2}},-\dfrac{c}{\sqrt{2}}\right)$.

Do ponto de vista geométrico, considerando x e y positivos, este problema será equivalente a saber qual o retângulo de maior área que se pode inscrever numa circunferência. A resposta será um quadrado cuja diagonal é igual ao diâmetro.



7. Outros problemas

***Problema 7.1** - Determine as dimensões do retângulo de maior perímetro que pode ser inscrito na elipse* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a,b>0$.



Considerando (x,y) um ponto da elipse tal que $x,y>0$, pela simetria da elipse, o perímetro do retângulo nela inscrito, conforme a figura ao lado, vem dado por $p=4x+4y$.

De $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, vem

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \Leftrightarrow y^2=\frac{b^2\left(a^2-x^2\right)}{a^2}$ e como $y>0$, temos $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$.

Então $p(x)=4x+4\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $0\le x\le a$.

Como $p(x)$ é contínua em $[0,a]$, pelo teorema de Weierstrass, $p(x)$ possui máximo e mínimo absolutos em $[0,a]$.

Derivando ,

$$p'(x)=4-4\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ ,\ 0<x<a.$$

Para $0<x<a$,

$$p'(x)=0\Leftrightarrow 4-4\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}=0\Leftrightarrow \frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}=1\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{a}{b}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado

$$\frac{x^2}{a^2-x^2}=\frac{a^2}{b^2}\Leftrightarrow b^2x^2=a^4-a^2x^2\Leftrightarrow x^2\left(a^2+b^2\right)=a^4\Leftrightarrow x^2=\frac{a^4}{a^2+b^2}$$

e como $x>0$, temos $x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ donde

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\frac{a^4}{a^2+b^2}}=\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}=\frac{b}{a}\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Tem-se,

$p(0) = 4b$

$p(a) = 4a$

$$p\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \frac{4a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} + 4\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2} = \frac{4a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} + 4\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \frac{a^4}{a^2+b^2}}$$

$$= \frac{4a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} + 4\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^4+a^2b^2-a^4}{a^2+b^2}} = \frac{4a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} + 4\frac{b}{a}\times\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{4a^2+4b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = 4\sqrt{a^2+b^2}$$

Como $4\sqrt{a^2+b^2} > 4\sqrt{a^2} = 4a$ e $4\sqrt{a^2+b^2} > 4\sqrt{b^2} = 4b$ conclui-se que $4\sqrt{a^2+b^2}$ é o máximo da função continua $p(x)$ restrita ao intervalo $[0,a]$.

O retângulo de maior perímetro que pode ser inscrito na elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tem lados de comprimentos $\frac{2a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $\frac{2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

. . . .

Resolvendo o problema usando uma função de duas variáveis e aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange, pretendemos maximizar $p(x,y) = 4x + 4y$ restrita ao conjunto $C = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\right\}$, com $g(x,y) = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2$.

Seja $P(x,y) = 4x + 4y + \lambda\left(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2\right)$, para $x > 0$ e $y > 0$. Vamos determinar as soluções do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 2\lambda b^2 x = 0 \\ 4 + 2\lambda a^2 y = 0 \\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \end{cases}$$

Como $x \neq 0$ da 1ª equação sai $\lambda = -\frac{2}{b^2x}$ e substituindo na 2ª equação obtemos

$$4 - \frac{4a^2y}{b^2x} = 0 \Leftrightarrow \frac{4a^2y}{b^2x} = 4 \Leftrightarrow a^2y = b^2x \Leftrightarrow y = \frac{b^2}{a^2}x.$$

Substituindo agora na 3ª equação temos

$$b^2x^2 + a^2 \cdot \frac{b^4}{a^4}x^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow b^2x^2 + \frac{b^4}{a^2}x^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2x^2 + b^2x^2 = a^4$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(a^2 + b^2\right) = a^4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^4}{a^2 + b^2}$$

Como $x > 0$, vem $x = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

donde $y = \dfrac{b^2}{a^2} \cdot \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow y = \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Comparando os valores de

$p\left(a,0\right) = 4a$, $p\left(0,b\right) = 4b$ e $p\left(\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = 4\dfrac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = 4\sqrt{a^2+b^2}$, concluímos que o máximo da função p restrita ao conjunto C é $4\sqrt{a^2+b^2}$.

***Problema 7.2 –** Qual é o retângulo de perímetro máximo inscrito numa circunferência de raio r ?*

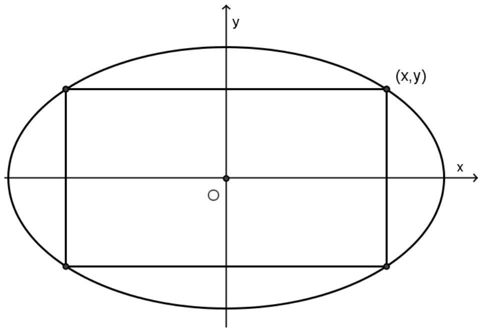
Este problema é um caso particular do problema anterior em que $a = b = r$.

Vimos na resolução do problema anterior que $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ e o que o perímetro máximo era $p = 4\sqrt{a^2 + b^2}$, atingido quando $x = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Como neste caso $a = b = r$, efetuando as substituições concluímos que o perímetro máximo será $p = 4\sqrt{r^2 + r^2} = 4\sqrt{2}r$ e que tal acontece quando $x = \dfrac{r^2}{\sqrt{r^2 + r^2}} = \dfrac{r^2}{\sqrt{2}r} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}r$ e $y = \sqrt{r^2 - \dfrac{r^2}{2}} = \sqrt{\dfrac{r^2}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}r$.

Assim, e tendo em consideração o problema 6.2, podemos afirmar que o retângulo de perímetro máximo e área máxima que se pode inscrever numa circunferência é um quadrado cuja diagonal é igual ao diâmetro.

***Problema 7.3 -** Determine as dimensões do retângulo de maior área que pode ser inscrito na elipse* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ a,b > 0$.

A área é dada por $A = 4xy$, onde $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$



como foi visto no problema anterior.

$$A(x) = 4x\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\ ,\ 0 \le x \le a$$

$$A'(x) = 4\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} - 4\frac{b}{a}\frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\ ,\ 0 < x < a$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Elevando ao quadrado

$$a^2 - x^2 = \frac{x^4}{a^2 - x^2} \Leftrightarrow a^4 - 2a^2x^2 + x^4 = x^4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{2}$$

Como $x > 0$, vem $x = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{b}{a}\frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}b$$

Uma vez que

$$A(0) = 0$$

$$A(a) = 0$$

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = 2ab$$

concluímos pelo teorema de Weierstrass que $2ab$ é o máximo da função contínua A, no intervalo $[0, a]$.

O retângulo de maior área que pode ser inscrito na elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tem lados de comprimentos $\sqrt{2}a$ e $\sqrt{2}b$.

. . . .

Resolvendo o problema com uma função de duas variáveis e aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange, pretendemos maximizar $A(x, y) = 4xy$ restrita ao conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0 \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0\}$, com $g(x, y) = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2$.

Seja $F(x,y) = 4xy + \lambda(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)$ para $x > 0$ e $y > 0$. Vamos determinar as soluções do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y + 2\lambda b^2 x = 0 \\ 4x + 2\lambda a^2 y = 0 \\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \end{cases}$$

Como $x \neq 0$ da 1ª equação sai $\lambda = -\dfrac{2y}{b^2x}$ e substituindo na 2ª equação obtemos

$4x - \dfrac{4a^2y^2}{b^2x} = 0 \Leftrightarrow 4a^2y^2 = 4b^2x^2 \Leftrightarrow y^2 = \dfrac{b^2x^2}{a^2}$, mas como $y > 0$ temos $y = \dfrac{bx}{a}$.

Substituindo agora na 3ª equação temos

$$b^2x^2 + a^2 \cdot \frac{b^2}{a^2}x^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow b^2x^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow 2b^2x^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2b^2}{2b^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Como $x > 0$ vem $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$ e $y = \dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}a \Leftrightarrow y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}b$.

Calculando

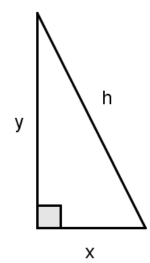
$A(a,0) = 0$

$A(0,b) = 0$

$A\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a, \dfrac{\sqrt{2}}{2}b\right) = 2ab$

e comparando os valores acima concluímos que a função contínua A restrita ao conjunto C, atinge um máximo no ponto de coordenadas $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a, \dfrac{\sqrt{2}}{2}b\right)$.

Problema 7.4 - *Faz-se girar um triângulo retângulo de hipotenusa h em torno de um dos seus catetos, gerando um cone circular reto. Qual o volume máximo do cone?*



Sejam x e y os catetos do triângulo, em que x será o raio da base do cone , y a altura e considerando a rotação em torno de y.

O volume do cone será $v = \dfrac{1}{3}\pi x^2 y$.

Pelo teorema de Pitágoras temos: $h^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{h^2 - x^2}$

mas como no nosso caso $y > 0$, vem $y = \sqrt{h^2 - x^2}$.

Substituindo no volume obtemos a função contínua $v(x) = \frac{1}{3}\pi x^2\sqrt{h^2 - x^2}$, $0 \leq x \leq h$.

Derivando vem

$$v'(x) = \frac{2}{3}\pi x\sqrt{h^2 - x^2} - \frac{\pi x^3}{3\sqrt{h^2 - x^2}} = \frac{2\pi x\left(h^2 - x^2\right) - \pi x^3}{3\sqrt{h^2 - x^2}} = \frac{\pi x\left(2h^2 - 3x^2\right)}{3\sqrt{h^2 - x^2}} \text{ , } 0 < x < h$$

Resolvendo a equação

$$v'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi x\left(2h^2 - 3x^2\right)}{3\sqrt{h^2 - x^2}} = 0 \underset{0<x<h}{\Leftrightarrow} 3x^2 = 2h^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3}h^2$$

mas uma vez que $x > 0$, só nos interessa a solução positiva.

Portanto o único ponto, do domínio considerado, onde a derivada do volume se anula é $x = \frac{\sqrt{6}}{3}h$.

Estudemos então a monotonia da função que traduz o volume.

x	0		$\frac{\sqrt{6}}{3}h$		h
$v'(x)$		+	0	−	
$v(x)$	0	↗	máximo	↘	0

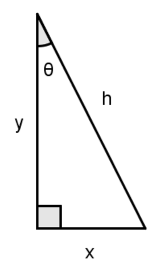
O volume do cone é máximo em $x = \frac{\sqrt{6}}{3}h$ e por consequência $y = \sqrt{h^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}h\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}h$.

O valor máximo do volume é $v = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{3}h\right)^2\frac{\sqrt{3}}{3}h = \frac{1}{3}\pi \times \frac{2}{3}h^2 \times \frac{\sqrt{3}}{3}h = \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi h^3$.

. . . .

Podemos também resolver este problema recorrendo à trigonometria.

Seja θ o ângulo que a hipotenusa faz com o cateto que será a altura do cone.



Assim temos $x = hsen\theta$ e $y = h\cos\theta$, $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, pelo que o volume será

$v(\theta) = \frac{1}{3}\pi h^3 sen^2\theta\cos\theta$.

Tomemos agora a função contínua $f(\alpha) = \frac{1}{3}\pi h^3 sen^2\alpha\cos\alpha$, $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Derivando obtemos

$$f'(\alpha) = \frac{2}{3}\pi h^3 sen\alpha\cos^2\alpha - \frac{1}{3}\pi h^3 sen^3\alpha = \frac{1}{3}\pi h^3 sen\alpha\left(2\cos^2\alpha - sen^2\alpha\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\pi h^3 sen\alpha\left(3\cos^2\alpha - 1\right).$$

Igualando a zero vem

$$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi h^3 sen\alpha\left(3\cos^2\alpha - 1\right) = 0 \Leftrightarrow sen\alpha = 0 \vee 3\cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow sen\alpha = 0 \vee \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Para $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ a única solução possível é $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Da fórmula fundamental da trigonometria temos

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow sen^2\alpha + \frac{1}{3} = 1 \Leftrightarrow sen^2\alpha = \frac{2}{3}$$

e como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, vem $sen\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, donde $f\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = \frac{1}{3}\pi h^3 \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi h^3$. Por outro lado $f(0) = 0$ e $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, pelo que a função f atinge o valor máximo em $\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Como v é a função f restringida a $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, concluímos que para $\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ obtemos o máximo do volume igual a $v\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = \frac{1}{3}\pi h^3 \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi h^3$.

. . . .

Resolvendo usando uma função de duas variáveis, aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange, pretendemos maximizar $v(x,y)=\frac{1}{3}\pi x^2 y$ restrita ao conjunto $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : g(x,y)=0 \wedge x\geq 0 \wedge y\geq 0\}$, com $g(x,y)=x^2+y^2-h^2$.

Sendo $V(x,y)=\frac{1}{3}\pi x^2 y+\lambda\left(x^2+y^2-h^2\right)$ tem-se para $x,y>0$:

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{2}{3}\pi xy+2\lambda x$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{1}{3}\pi x^2+2\lambda y$$

$$x^2+y^2=h^2$$

Procuramos as soluções do sistema

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial V}{\partial y}=0\\ g(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{3}\pi xy+2\lambda x=0\\ \dfrac{1}{3}\pi x^2+2\lambda y=0\\ x^2+y^2=h^2\end{cases}$$

Como $x>0$, da 1ª equação vem $\lambda=-\frac{1}{3}\pi y$ e substituindo na 2ª equação obtemos $\frac{1}{3}\pi x^2-\frac{2}{3}\pi y^2=0\Leftrightarrow x^2=2y^2$. Ou seja no nosso caso $x=\sqrt{2}y$.

Substituindo agora na 3ª equação temos

$$2y^2+y^2=h^2\Leftrightarrow 3y^2=h^2\Leftrightarrow y^2=\frac{h^2}{3}$$

donde sai $y=\frac{\sqrt{3}}{3}h$ e $x=\frac{\sqrt{6}}{3}h$.

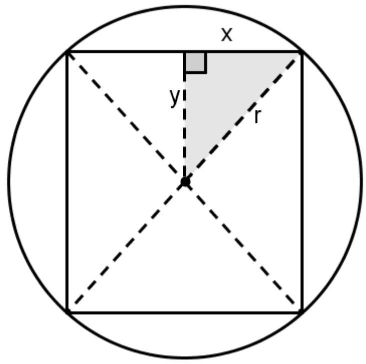
O ponto de estacionaridade de V que satisfaz $g(x,y)=0$ é o ponto de coordenadas $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}h,\frac{\sqrt{3}}{3}h\right)$ e temos $v(h,0)=0$, $v(0,h)=0$ e $v\left(\frac{\sqrt{6}}{3}h,\frac{\sqrt{3}}{3}h\right)=\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi h^3$

donde se concluí que $\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi h^3$ é volume máximo.

***Problema 7.5** - Determine o volume do maior cilindro circular reto que pode ser inscrito numa esfera de raio r.*

Uma das formas de abordar este problema é recorrer ao problema anterior.

Imaginemos um cone obtido pela rotação de um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é o raio da esfera, em torno de um dos seus catetos, indicado por y na figura. O raio da base do cone de volume máximo será igual ao raio da base do cilindro de volume máximo.



Do problema anterior vem que o cone com vértice no centro da esfera de volume máximo tem raio da base $x=\frac{\sqrt{6}}{3}r$ e altura $y=\frac{\sqrt{3}}{3}r$.

Portanto o cilindro de volume máximo tem raio da base $x=\frac{\sqrt{6}}{3}r$ e altura $2y=\frac{2\sqrt{3}}{3}r$ donde se conclui que o volume máximo do cilindro é $V=\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{3}r\right)^2\frac{2\sqrt{3}}{3}r=\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi r^3$, ou seja $\frac{\sqrt{3}}{3}$ do volume da esfera.

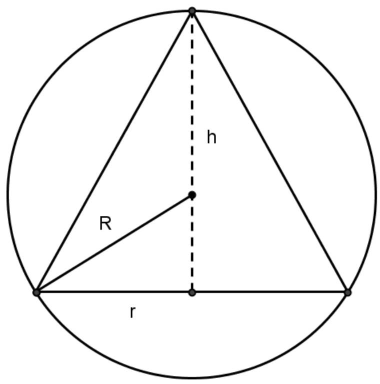
***Problema 7.6** – Qual o cone de volume máximo que se pode inscrever numa esfera de raio R?*

Seja h a altura do cone, r o raio da base do cone e R o raio da esfera.

O volume do cone é $v=\frac{\pi hr^2}{3}$

mas pelo teorema de Pitágoras

$r^2 = R^2-\left(h-R\right)^2 \Leftrightarrow r^2 = 2hR-h^2$



e $v\left(h\right)=\frac{\pi h\left(2hR-h^2\right)}{3}=\frac{2\pi h^2R-\pi h^3}{3}$, $0\le h\le 2R$.

Derivando para $0<h<2R$

$v'\left(h\right)=\frac{4\pi hR-3\pi h^2}{3}$

Igualando a zero temos

$$v'(h)=0 \Leftrightarrow \frac{4\pi hR-3\pi h^2}{3}=0 \Leftrightarrow \pi h(4R-3h)=0 \Leftrightarrow \pi h=0 \vee 4R-3h=0 \Leftrightarrow h=0 \vee h=\frac{4}{3}R$$

Como $0<h<2R$, a única solução possível é $h=\frac{4}{3}R$.

Calculando

$$v(0)=0$$

$$v(2R)=\frac{8\pi R^3-8\pi R^3}{3}=0$$

$$v\left(\frac{4}{3}R\right)=\frac{\frac{32\pi}{9}R^3-\frac{64\pi}{27}R^3}{3}=\frac{32\pi}{81}R^3$$

concluímos aplicando o teorema de Weierstrass que a função contínua v, restrita ao intervalo $[0,2R]$ tem valor máximo $\frac{32\pi}{81}R^3$, quando $h=\frac{4}{3}R$.

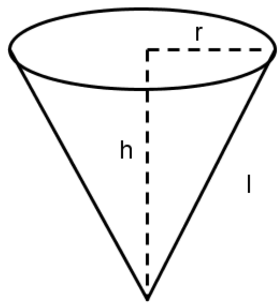
A título de curiosidade o volume máximo do cone inscrito na esfera é igual a $\frac{8}{27}$ do volume da esfera.

Problema 7.7 – *Considerando um tanque cónico, sem tampa, de volume V, quais as dimensões do tanque que minimiza a quantidade de material usado na sua fabricação?*

Seja l o lado do cone, h a altura e r o raio da base do cone.

A área do cone, sem tampa, é $a=\pi rl=\pi r\sqrt{h^2+r^2}$.

O volume do cone é dado por $V=\frac{\pi hr^2}{3}$,



então a área vem $a(r)=\pi r\sqrt{r^2+\frac{9V^2}{\pi^2 r^4}}$, $r>0$

Para simplificar vamos estudar a função $a^2(r)$.

$$a^2(r)=\pi^2 r^2\left(r^2+\frac{9V^2}{\pi^2 r^4}\right)=\pi^2 r^4+\frac{9V^2}{r^2}$$

$$\left(a^2\right)'(r)=4\pi^2 r^3-\frac{18V^2}{r^3}$$

$$\left(a^2\right)'(r)=0 \Leftrightarrow 4\pi^2 r^3=\frac{18V^2}{r^3} \Leftrightarrow 4\pi^2 r^6=18V^2 \Leftrightarrow r^6=\frac{9V^2}{2\pi^2}$$

uma vez que $r>0$ vem $r=\sqrt[6]{\dfrac{9V^2}{2\pi^2}}$.

r	0		$\sqrt[6]{\dfrac{9V^2}{2\pi^2}}$		$+\infty$
$\left(a^2\right)'(r)$		$-$	0	$+$	
$\left(a^2\right)(r)$		$\searrow$	mínimo	$\nearrow$	

Logo a área de material utilizado é mínima quando $r=\sqrt[6]{\dfrac{9V^2}{2\pi^2}}$,

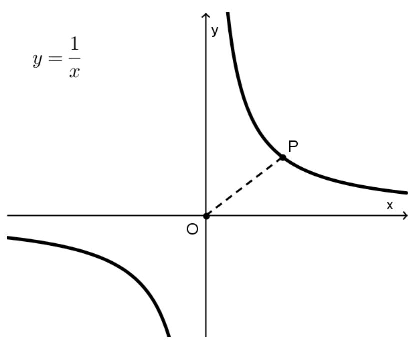
$$h=\frac{3V}{\pi\left(\sqrt[6]{\dfrac{9V^2}{2\pi^2}}\right)^2}=\frac{3V}{\pi\sqrt[3]{\dfrac{9V^2}{2\pi^2}}}=\sqrt[3]{\frac{27V^3}{\pi^3\dfrac{9V^2}{2\pi^2}}}=\sqrt[3]{\frac{27V^3}{\dfrac{9V^2\pi}{2}}}=\sqrt[3]{\frac{54V^3}{9V^2\pi}}=\sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$$ e uma vez que

$\lim\limits_{r\to 0} a^2(r)=+\infty$ e $\lim\limits_{r\to+\infty} a^2(r)=+\infty$ concluímos que não existe um valor máximo para a área.

Problema 7.8 *- Determinar o ponto P situado sobre a hipérbole $xy=1$, que está mais próximo da origem.*

Seja $P=(x,y)$ um ponto situado sobre a hipérbole $xy=1$.

Pela equação da hipérbole concluímos que $x\neq 0$, $y\neq 0$ e que, por exemplo, $y=\dfrac{1}{x}$.



A distância de P à origem é dada por $d=\sqrt{x^2+y^2}$ e substituindo y vem uma função na variável x dada por $d(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}$.

Como se trata de uma distância, e portanto uma função positiva, minimizar $d(x)$ será equivalente a minimizar $d^2(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

Derivando, vem

$$\left(d^2\right)'(x) = 2x - \frac{2}{x^3}$$

$\left(d^2\right)'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{2}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^4 - 2}{x^3} = 0$, donde como $x \neq 0$, temos

$2x^4 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Como $\left(d^2\right)''(x) = 2 + \frac{6}{x^4}$, concluímos que $\left(d^2\right)''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, donde a função tem mínimos locais nos pontos $x = \pm 1$, que pelas características geométricas do problema se percebe serem mínimos absolutos.

Se $x = 1$, vem $y = 1$.

Se $x = -1$, vem $y = -1$.

Os pontos cuja distância à origem é mínima têm coordenadas $(1,1)$ ou $(-1,-1)$.

. . . .

Abordando o problema usando uma função de duas variáveis e aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange, pretendemos minimizar $f(x,y) = x^2 + y^2$ sujeita à condição $g(x,y) = 0$, com $g(x,y) = xy - 1$.

Seja $F(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 1)$. Queremos determinar as soluções do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \lambda y = 0 \\ 2y + \lambda x = 0 \\ xy = 1 \end{cases}$$

Como $y \neq 0$ da 1ª equação sai $\lambda = -\frac{2x}{y}$ e substituindo na 2ª equação obtemos

$2y - \frac{2x^2}{y} = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = -y \vee x = y$.

Se $x = -y$, obtemos na 3ª equação $x^2 = -1$, o que é impossível.

Se $x = y$, obtemos na 3ª equação $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$.

Portanto os pontos de estacionaridade são os pontos de coordenadas $(-1,-1)$ e $(1,1)$, que são pontos onde a função atinge o mínimo.

***Problema 7.9** - Um fio de comprimento l é cortado em dois pedaços. Com um deles se fará um círculo e com o outro um quadrado.*
Como devemos cortar o fio a fim de que a soma das duas áreas compreendidas pelas figuras seja mínima?

Suponhamos que cortamos o fio obtendo um pedaço de comprimento x e outro de comprimento $l-x$.
Suponhamos ainda que o pedaço de comprimento x servirá para formar um círculo de raio r.
Então $x=2\pi r$ e como $l-x$ é igual ao perímetro do quadrado, o lado do quadrado é $\frac{l-x}{4}$.

A área das figuras obtidas é $A=\pi r^2+\left(\frac{l-x}{4}\right)^2$. Mas como $r=\frac{x}{2\pi}$, vem $A(x)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{(l-x)^2}{16}$, $0\leq x\leq l$. Trata-se de uma função contínua, pelo que, de acordo com o teorema de Weierstrass, a função A atinge um mínimo e um máximo absolutos em $[0,l]$.

$$A'(x)=\frac{x}{2\pi}-\frac{l-x}{8}$$

$$A'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x}{2\pi}-\frac{l-x}{8}=0\Leftrightarrow 4x-\pi l+\pi x=0\Leftrightarrow x(4+\pi)=\pi l\Leftrightarrow x=\frac{\pi l}{4+\pi}.$$

Para este valor de x temos:

$$A\left(\frac{\pi l}{4+\pi}\right)=\frac{\left(\frac{\pi l}{4+\pi}\right)^2}{4\pi}+\frac{\left(l-\frac{\pi l}{4+\pi}\right)^2}{16}=\frac{\left(\frac{\pi l}{4+\pi}\right)^2}{4\pi}+\frac{\left(\frac{4l}{4+\pi}\right)^2}{16}=\frac{\pi^2l^2}{4\pi(4+\pi)^2}+\frac{16l^2}{16(4+\pi)^2}=$$

$$=\frac{4\pi^2l^2+16\pi l^2}{16\pi(4+\pi)^2}=\frac{l^2(\pi+4)}{4(4+\pi)^2}=\frac{l^2}{4(4+\pi)}=\frac{l^2}{16+4\pi}.$$

Nos pontos fronteiros do domínio, a função $A(x)$ toma os valores $A(0)=\frac{l^2}{16}$ e $A(l)=\frac{l^2}{4\pi}$.

Qualquer um deles é maior que $A\left(\frac{\pi l}{4+\pi}\right)$ pelo que se pode afirmar que $A\left(\frac{\pi l}{4+\pi}\right)=\frac{l^2}{16+4\pi}$ é o mínimo da função.

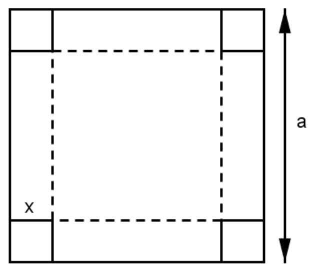
Como devemos cortar o fio a fim de que a soma das áreas compreendidas seja máxima?

Do estudo anterior ficamos a saber que para $x \in]0,l[$ o único ponto de estacionaridade de A corresponde a um mínimo. Pelo teorema de Weierstrass, sabemos que a função A também possui um máximo, este necessariamente será atingido em $x=0$ ou $x=l$.

Como $A(0)=\frac{l^2}{16}<A(l)=\frac{l^2}{4\pi}$, concluímos que máximo da área é obtido quando $x=l$, ou seja quando só for construído o círculo, o que está de acordo com o estudo do problema isoperimétrico que foi apresentado no capítulo 3.

Problema 7.10 – *Dispondo-se de uma cartolina quadrada de lado a, pretende-se fazer uma caixa sem tampa, recortando quadrados iguais nos cantos e dobrando os seus lados. Qual deve ser o comprimento do lado do quadrado que se recorta para que o volume da caixa seja máximo? Qual é o volume máximo da caixa?*

Designando por x o comprimento do lado do quadrado que se corta nos cantos, temos $0 \le x \le \frac{a}{2}$.



Dobrando a parte de cartolina restante, obtém-se a caixa aberta.

O volume da caixa é $V(x)=(a-2x)^2 x = 4x^3-4ax^2+a^2x$, $0 \le x \le \frac{a}{2}$.

Pelo teorema Weierstrass a função contínua V tem um máximo e um mínimo absolutos em $\left[0,\frac{a}{2}\right]$.

Derivando obtemos,

$V'(x)=12x^2-8ax+a^2$, $0<x<\frac{a}{2}$.

Igualando a zero

$$V'(x)=0 \Leftrightarrow 12x^2-8ax+a^2=0 \Leftrightarrow x=\frac{8a\pm\sqrt{64a^2-48a^2}}{24} \Leftrightarrow x=\frac{8a\pm 4a}{24} \Leftrightarrow x=\frac{a}{2} \vee x=\frac{a}{6}.$$

mas como $0<x<\frac{a}{2}$, teremos $x=\frac{a}{6}$.

Calculando

$$V(0)=(a-0)^2\times 0=0$$

$$V\left(\frac{a}{2}\right)=\left(a-\frac{2a}{2}\right)^2\times\frac{a}{2}=0$$

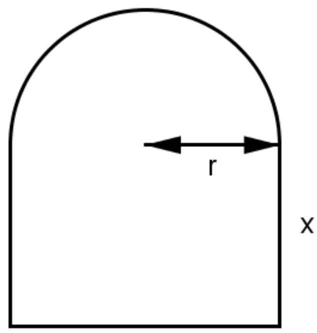
$$V\left(\frac{a}{6}\right)=\left(a-\frac{2a}{6}\right)^2\times\frac{a}{6}=\frac{4a^2}{9}\times\frac{a}{6}=\frac{2a^3}{27}$$

Concluímos que a função tem um mínimo em $x=0$ e $x=\frac{a}{2}$ e um máximo em $x=\frac{a}{6}$.

Assim o volume máximo é atingido cortando em cada canto um quadrado de lado $\frac{a}{6}$, obtendo-se uma caixa cujo volume máximo é $\frac{2a^3}{27}$.

Problema 7.11 **-** *Uma janela tem forma de um retângulo encimado por um semicírculo. De entre as janelas de perímetro p qual tem maior área?*

Seja x a altura do retângulo e r o raio do semicírculo, conforme a figura ao lado.



$$p=2x+2r+\pi r=2x+(2+\pi)r$$

A área é dada por

$a=\frac{\pi r^2}{2}+2rx$, mas como $x=\frac{p-(2+\pi)r}{2}$, vem

$$a(r)=\frac{\pi r^2}{2}+pr-(2+\pi)r^2,\ 0\le r\le\frac{p}{2+\pi}$$

Pelo teorema Weierstrass a função contínua $a(r)$ tem um máximo e um mínimo absolutos em $\left[0,\frac{p}{2+\pi}\right]$.

Derivando em ordem a r obtemos

$$a'(r)=p-4r-\pi r,\ 0<r<\frac{p}{2+\pi}$$

Calculando os zeros da derivada

$$a'(r)=0 \Leftrightarrow r(-4-\pi)=-p \Leftrightarrow r=\frac{p}{4+\pi}.$$

Tem-se

$$a\left(\frac{p}{4+\pi}\right)=\frac{\pi\left(\frac{p}{4+\pi}\right)^2}{2}+p\left(\frac{p}{4+\pi}\right)-(2+\pi)\left(\frac{p}{4+\pi}\right)^2=\frac{\pi p^2}{2(4+\pi)^2}+\frac{p^2}{4+\pi}-\frac{2p^2+\pi p^2}{(4+\pi)^2}=$$
$$=\frac{\pi p^2+2p^2(4+\pi)-4p^2-2\pi p^2}{2(4+\pi)^2}=\frac{\pi p^2+8p^2+2p^2\pi-4p^2-2\pi p^2}{2(4+\pi)^2}=\frac{p^2(4+\pi)}{2(4+\pi)^2}=\frac{p^2}{8+2\pi}$$

$$a(0)=0$$

$$a\left(\frac{p}{2+\pi}\right)=\frac{\pi\left(\frac{p}{2+\pi}\right)^2}{2}+p\left(\frac{p}{2+\pi}\right)-(2+\pi)\left(\frac{p}{2+\pi}\right)^2=\frac{\pi p^2}{2(2+\pi)^2}+\frac{p^2}{2+\pi}-\frac{p^2}{2+\pi}=\frac{\pi p^2}{2(2+\pi)^2}$$

Como $\frac{p^2}{8+2\pi}>\frac{\pi p^2}{2(2+\pi)^2}$, concluímos que máximo da função no intervalo $\left[0,\frac{p}{2+\pi}\right]$ é atingido quando $r=\frac{p}{4+\pi}$.

Problema 7.12 - *Uma lata cilíndrica sem tampa superior tem volume V. Determine as dimensões da lata, de modo a que a quantidade de material necessário para a sua fabricação seja mínima.*

Designando por h a altura e por r o raio da base da lata, a respetiva área da superfície é dada por $a=\pi r^2+2\pi rh$.

Como o volume é V podemos escrever h em função de r na seguinte forma: $h=\frac{V}{\pi r^2}$.

Substituindo na expressão da área obtemos

$$a(r)=\pi r^2+2\frac{V}{r},\ r>0$$

$$a'(r)=2\pi r-2\frac{V}{r^2}$$

$$a'(r)=0 \Leftrightarrow 2\pi r-2\frac{V}{r^2}=0 \Leftrightarrow \pi r^3=V \Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

$$a''(r) = 2\pi + \frac{4V}{r^3}$$

$$a''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right) = 2\pi + \frac{4V}{\frac{V}{\pi}} = 6\pi > 0$$

logo $a(r)$ atinge um mínimo quando $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ e $h = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)^2} = \frac{V\pi^{\frac{2}{3}}}{\pi V^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

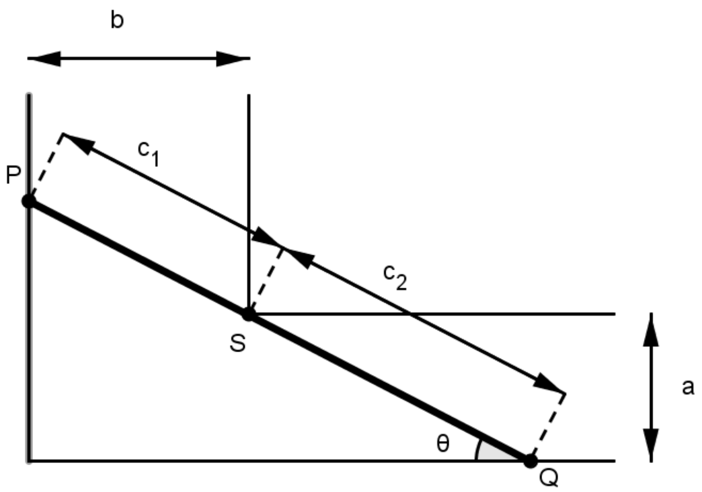
Como obtemos um único ponto de estacionaridade de a e como $\lim_{r\to+\infty} a(r) = \lim_{r\to+\infty}\left(\pi r^2 + 2\frac{V}{r}\right) = +\infty$ e $\lim_{r\to 0^+} a(r) = \lim_{r\to 0^+}\left(\pi r^2 + 2\frac{V}{r}\right) = +\infty$ concluímos que não existe um máximo para a área da superfície da lata e que o mínimo local é mínimo absoluto.

Logo a área mínima é $a\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right) = \pi\left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} + 2\frac{V}{\left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}} = \pi^{\frac{1}{3}}V^{\frac{2}{3}} + 2\pi^{\frac{1}{3}}V^{\frac{2}{3}} = 3\sqrt[3]{\pi V^2}$.

Problema 7.13 *– Um cano de metal deve ser transportado por um corredor em forma de L com largura* a *e* b*. Qual o comprimento máximo do cano que passa pelo corredor sem o levantar do chão?*

Para resolvermos este problema vamos estudar os comprimentos dos segmentos $[PQ]$, os quais intersectam a esquina interna do corredor no ponto S e se apoiam nas paredes nos pontos P e Q.

Seja $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ o ângulo que o segmento $[PQ]$ faz com a parede na horizontal, conforme a figura.



Designemos por c o comprimento do segmento $[PQ]$ e por c_1 e c_2 os comprimentos das partes do segmento compreendidas entre as paredes e a quina interna.

Aplicando as razões trigonométricas temos

$sen\theta = \frac{a}{c_2} \Leftrightarrow c_2 = \frac{a}{sen\theta}$, pois $sen\theta \neq 0$, $\forall \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

$\cos\theta = \frac{b}{c_1} \Leftrightarrow c_1 = \frac{b}{\cos\theta}$, pois $\cos\theta \neq 0$, $\forall \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Como $c = c_1 + c_2$, vem

$$c(\theta) = \frac{b}{\cos\theta} + \frac{a}{sen\theta} \text{ , } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ .}$$

O comprimento máximo que o cano pode ter para passar pelo corredor nestas condições corresponde ao mínimo de $c(\theta)$.

Derivando $c(\theta)$ tem-se

$$c'(\theta) = \frac{bsen\theta}{\cos^2\theta} - \frac{a\cos\theta}{sen^2\theta} \text{ .}$$

Igualando a zero vem

$$c'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \frac{bsen\theta}{\cos^2\theta} - \frac{a\cos\theta}{sen^2\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{bsen^3\theta - a\cos^3\theta}{\cos^2\theta sen^2\theta} = 0$$

$$\Leftrightarrow bsen^3\theta - a\cos^3\theta = 0 \Leftrightarrow bsen^3\theta = a\cos^3\theta \Leftrightarrow tg^3\theta = \frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow tg\theta = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \Leftrightarrow \theta = arctg\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)$$

θ	0		$arctg\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)$		$\frac{\pi}{2}$
$c'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$c(\theta)$		↘	mínimo	↗	

$c\left(arctg\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)\right)$ é o mínimo da função.

Para determinar o seu valor vamos recorrer a uma variante da fórmula fundamental da trigonometria, sabendo que $tg\theta = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ e que $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

De $tg^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$, vem

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos^2\theta} = \dfrac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b^2}} \Leftrightarrow \cos^2\theta = \dfrac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}$ e como $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, temos

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}} = \frac{\sqrt[6]{b^2}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}} = \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}}.$$

Como $tg\theta = \dfrac{sen\theta}{\cos\theta}$, temos $sen\theta = \sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}}$ donde

$$c\left(arctg\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)\right) = \frac{b}{\dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}}} + \frac{a}{\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}}} = \frac{b\sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}}{\sqrt[3]{b}} + \frac{a\sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}}{\sqrt[3]{a}} =$$

$$= \sqrt[3]{b^2}\sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}} + \sqrt[3]{a^2}\sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}\right).$$

Em particular, no caso em que o corredor tem igual largura em toda a sua extensão, ou seja quando $a = b$, temos

$$c(\theta) = \frac{a}{\cos\theta} + \frac{a}{sen\theta}\ ,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$c'(\theta) = \frac{asen\theta}{\cos^2\theta} - \frac{a\cos\theta}{sen^2\theta}.$$

Neste caso o valor mínimo do comprimento é atingido quando $\theta = arctg(1)$, isto é, quando, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

O comprimento do cano nestas condições é $c\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \dfrac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{4a}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}a$.

Problema 7.14 – Supondo que o produto de dois números positivos é c (constante real positiva), qual é valor mínimo e máximo para a sua soma?

Sejam x e y dois números positivos tais que $xy = c$.

Pretendemos estudar o comportamento da soma dos números $s = x + y$.

De $xy = c \Leftrightarrow y = \dfrac{c}{x}$, uma vez que $x \neq 0$, pelo que $s(x) = x + \dfrac{c}{x}\ ,\ x > 0$.

Derivando vem

$$s'(x)=1-\frac{c}{x^2}$$

Igualando a zero vem

$$s'(x)=0 \Leftrightarrow 1-\frac{c}{x^2}=0 \Leftrightarrow x^2=c$$

Como por hipótese temos $x>0$, vem $x=\sqrt{c}$.

x	0		$\sqrt{c}$		$+\infty$
$s'(x)$		$-$	0	$+$	
$s(x)$		$\searrow$	mínimo	$\nearrow$	

O valor mínimo da soma é $s\left(\sqrt{c}\right)=\sqrt{c}+\frac{c}{\sqrt{c}}=2\sqrt{c}$.

Em relação ao valor máximo para a soma convém notar o seguinte:

$$\lim_{x\to 0^+} s(x)=\lim_{x\to +\infty} s(x)=+\infty$$

pelo que podemos afirmar que a soma não tem um valor máximo.

Problema 7.15

Ao ser lançado, um foguetão é impulsionado pela expulsão dos gases resultantes da queima de combustível numa câmara.

Desde o arranque até se esgotar o combustível, a velocidade do foguetão, em quilómetros por segundo, é dada por:

$v(t)=-3\ln(1-0,005t)-0,01t$ ($\ln$ significa *logaritmo de base* e)

A variável t designa o tempo, em segundos, após o arranque.

a) A massa inicial do foguetão é de 150 toneladas, dos quais 80% correspondem à massa do combustível.

   Sabendo que o combustível é consumido à taxa de 0,75 toneladas por segundo, justifique que $t\in[0,160]$.

b) Verifique que a derivada da função v, no intervalo $]0,160[$, é positiva e conclua qual é a velocidade máxima que o foguetão atinge neste intervalo. Apresente o resultado em quilómetros por segundo, arredondado às décimas.

Exame Nacional de 12º ano, 1ª fase, 2ª chamada 1999, código 135

Resolução

a) A massa de combustível é igual a $150 \times 80\% = 120$ toneladas.

O tempo que demora a gastar o combustível é $120 \div 0,75 = 160$ segundos, logo $t \in [0,160]$.

b) Como $t \in [0,160]$ e a função $v(t) = -3\ln(1-0,005t) - 0,01t$ é contínua em $[0,160]$, $v(t)$ possui máximo e mínimo no intervalo $[0,160]$.

Derivando $v(t)$

$$v'(t) = \frac{0,015}{1-0,005t} - 0,01 = \frac{0,005+0,00005t}{1-0,005t} > 0 \ , \quad \forall t \in]0,160[$$

Concluímos que a função $v(t)$ é estritamente crescente em $[0,160]$ e como tal atinge o mínimo quando $t=0$ e o máximo quando $t=160$, sendo o valor máximo da velocidade

$v(160) = -3\ln(1-0,005\times 160) - 0,01\times 160 = -3\ln(0,2) - 1,6 \simeq 3,2$ km/s.

8. Médias

As médias mais conhecidas são a média aritmética, a média geométrica e a média harmónica.

Definição 8.1 Para dois números a e b, definimos média aritmética, média geométrica e média harmónica respetivamente por:

$$A = \frac{a+b}{2} \qquad G = \sqrt{ab} \qquad H = \frac{2ab}{a+b}$$

Geralmente para calcular a média geométrica impõe-se a condição $a,b > 0$ e no cálculo da média harmónica que a e b não sejam nulos.

Vamos considerar no que se segue $a,b > 0$.

Podemos escrever a média geométrica como $G^2 = ab$ ou $\frac{a}{G} = \frac{G}{b}$. A média harmónica pode ser considerada como o inverso da média aritmética dos inversos, isto é $\frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$.

Das definições sai que $AH = G^2$, ou seja a média geométrica de dois números é também a média geométrica entre a média aritmética e a média harmónica destes números.

Proposição 8.2 Dados os números positivos a e b, com $a \leq b$, tem-se $a \leq H \leq G \leq A \leq b$, sendo as desigualdades estritas se $a < b$.

Demonstração.

Sejam $a,b > 0$.

Se $a = b$, então $A = \frac{a+a}{2} = a$; $G = \sqrt{a \cdot a} = a$ e $H = \frac{2a \cdot a}{a+a} = a$, isto é, $a = H = G = A = b$.

Se $a < b$, temos:

$a + b < b + b = 2b$, logo $a\left(a+b\right) < 2ab$ e como consequência $a < \frac{2ab}{a+b}$, ou seja $a < H$.

Por $(a-b)^2>0$ temos que $a^2-2ab+b^2>0$, donde somando $4ab$ a cada membro temos $a^2+2ab+b^2>4ab$. Podemos então escrever que $(a+b)^2>\dfrac{4a^2b^2}{ab}$ ou seja $ab>\dfrac{4a^2b^2}{(a+b)^2}$, donde se conclui que $\sqrt{ab}>\dfrac{2ab}{a+b}$, ou seja $H<G$.

De $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2>0$, vem $a+b-2\sqrt{a}\sqrt{b}>0$ ou seja $\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}$, isto é $G<A$.

Finalmente

$a+b<b+b$ ou seja $a+b<2b$ isto é $\dfrac{a+b}{2}<b$, ou seja $A<b$.□

8.1. Médias para mais de dois números

As médias vistas anteriormente para dois números podem ser generalizadas para mais números.

Definição 8.3 Dados n números positivos $x_1,x_2,...,x_n$, define-se:

$$A=\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n},\ G=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot ....\cdot x_n}\ \text{ e } H=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}.$$

Como, consequência da definição 8.3, temos:

Proposição 8.4 Dados n números positivos $x_1,x_2,...,x_n$, temos $H\le G\le A$.

No caso em que em que $x_1=x_2=...=x_n$, então $A=G=H$.

Antes de demonstrar a proposição 8.4, vamos demonstrar o seguinte lema.

Lema 8.5 Dados n números positivos $x_1,x_2,...,x_n$, se $x_1\cdot x_2\cdot ...\cdot x_n=1$ então $x_1+x_2+...+x_n\ge n$, tendo-se a igualdade se e só se $x_1=x_2=...=x_n$.

Demonstração.

Vamos efetuar a prova por indução, no caso $n=1$ o resultado é trivial.

Hipótese de indução: se $x_1\cdot x_2\cdot ...\cdot x_p=1$ então $x_1+x_2+...+x_p\ge p$

Tese: se $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_p \cdot x_{p+1} = 1$ então $x_1 + x_2 + ... + x_p + x_{p+1} \geq p+1$

Como $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_p \cdot x_{p+1} = 1$ existe pelo menos um termo maior ou igual a 1 e pelo menos um termo menor ou igual a 1.

Vamos supor, sem perda de generalidade que $x_1 \leq 1$ e que $x_2 \geq 1$. Assim temos $x_1 - 1 \leq 0$ e $1 - x_2 \leq 0$ logo $(x_1 - 1)(1 - x_2) \geq 0 \Leftrightarrow x_1 - x_1x_2 - 1 + x_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 \geq 1 + x_1x_2$.

Podemos então escrever

$x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_p \cdot x_{p+1} = 1 \Leftrightarrow (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_{p+1} = 1$ e pela hipótese de indução se o produto de p fatores é igual a 1, então $(x_1 \cdot x_2) + x_3 + ... + x_{p+1} \geq p$, donde se conclui que

$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{p+1} \geq 1 + x_1x_2 + x_3 + ... + x_{p+1} \geq p+1$.

Se pelo menos um dos x_i for diferente dos restantes o raciocínio anterior é válido com desigualdades estritas o que mostra que neste caso $x_1 + x_2 + ... + x_n > n$. Por outro lado, se $x_1 = x_2 = ... = x_n$ e $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = 1$ então $x_i = 1$, $\forall i = 1, ..., n$ donde $x_1 + x_2 + ... + x_n = n$.

□

Passemos agora à demonstração da proposição 8.4.

Demonstração.

$$1 = \frac{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot .... \cdot x_n}}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot .... \cdot x_n}} = \frac{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot .... \cdot x_n}}{\sqrt[n]{\underbrace{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot .... \cdot x_n} \cdot \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot .... \cdot x_n} \cdot .... \cdot \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot .... \cdot x_n}}_{n \text{ fatores}}}}$$

$$= \sqrt[n]{\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot .... \cdot x_n}} \cdot \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot .... \cdot x_n}} \cdot .... \cdot \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot .... \cdot x_n}}}$$

e portanto $\dfrac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot .... \cdot x_n}} \cdot \dfrac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot .... \cdot x_n}} \cdot .... \cdot \dfrac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot .... \cdot x_n}} = 1$

pelo lema 8.5,

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot .... \cdot x_n}} + \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot .... \cdot x_n}} + ... + \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot .... \cdot x_n}} \geq n \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot .... \cdot x_n}}(x_1 + x_2 + ... + x_n) \geq n$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot .... \cdot x_n}$$

Fica mostrado que $G \leq A$, falta mostrar que $H \leq G$.

Para isso convém lembrar que o inverso da média harmónica de n números positivos é a média aritmética dos inversos desses números, ou seja dados n números positivos $x_1, x_2, ..., x_n$, tem-se

$$\frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot ... \cdot \frac{1}{x_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot .... \cdot x_n}}$$

ou seja $\frac{1}{H} \geq \frac{1}{G}$, donde sai $H \leq G$.

É fácil verificar que se $x_1 = x_2 = ... = x_n = k$, então $A = \frac{nk}{n} = k$, $G = \sqrt[n]{k^n} = k$ e $H = \frac{n}{\frac{n}{k}} = k$, ou seja $H = A = G$.

□

Resulta da demonstração anterior e do lema 8.5 que se os números $x_1, ..., x_n$ não forem todos iguais se tem $G < A$. Este facto será usado no que se segue.

8.2. Aplicações das desigualdades das médias

1) *Mostre que se* $x > 0$*, então* $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Aplicando a desigualdade das médias $(A \geq G)$ aos números x e $\frac{1}{x}$, vem

$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}$, isto é, $\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq 1$, ou seja $x + \frac{1}{x} \geq 2$ e $x + \frac{1}{x} = 2$ se e só se $x = 1$.

2) *Considerando as variáveis reais positivas* x, y, z, w*, qual o menor valor da expressão* $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{w} + \frac{w}{x}$*?*

Aplicando a desigualdade das médias $(A \geq G)$ aos números $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{w}$ e $\frac{w}{x}$ vem,

$\dfrac{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{w}+\frac{w}{x}}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{w}\cdot\frac{w}{x}}$ ou seja, $\dfrac{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{w}+\frac{w}{x}}{4} \geq 1$ e como tal $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{w}+\frac{w}{x} \geq 4$,

donde se conclui que o valor mínimo da expressão $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{w}+\frac{w}{x}$ é 4 e é atingido quando $x = y = w = z$.

3) *Para* $x > 0$*, qual é o valor mínimo de* $y = x^2 + \frac{1}{x}$*?*

Podemos escrever $y = x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x}$.

Aplicando a desigualdade das médias a x^2, $\frac{1}{2x}$ e $\frac{1}{2x}$ vem,

$\dfrac{x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x}}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{2x}}$ ou seja $\dfrac{x^2 + \frac{1}{x}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$, donde $x^2 + \frac{1}{x} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

O valor mínimo de y é $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$, o que se verifica quando $x^2 = \frac{1}{2x}$ ou seja quando $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

4) *Se* x, y, z *são números positivos, qual o valor mínimo de* $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$*?*

Tem-se $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = 1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1$.

Aplicando a desigualdade das médias temos

$\dfrac{1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1}{9} \geq \sqrt[9]{1\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{z}\cdot\frac{y}{x}\cdot 1\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}\cdot\frac{z}{y}\cdot 1}$, ou seja

$\dfrac{1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1}{9} \geq 1$, donde se conclui que

$1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1 \geq 9$ e que a expressão $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ tem como valor mínimo 9, sendo este valor atingido quando $x = y = z$.

5) Resolução do problema 7.6

Seja h a altura do cone, r o raio da base do cone e R o raio da esfera.

O volume do cone é $v = \frac{\pi h r^2}{3}$ e como visto $v = \frac{2\pi h^2 R - \pi h^3}{3} = \frac{\pi h^2 (2R-h)}{3}$.

Podemos então escrever, aplicando a desigualdade das médias que:

$\frac{3v}{4\pi} = \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot (2R-h) \leq \left(\frac{\frac{h}{2} + \frac{h}{2} + 2R - h}{3} \right)^3 = \left(\frac{2R}{3} \right)^3$, atingindo o volume máximo quando se tem a igualdade, ou seja quando $\frac{h}{2} = 2R - h \Leftrightarrow h = 4R - 2h \Leftrightarrow h = \frac{4R}{3}$.

6) Resolução do problema 7.10

Nas condições do enunciado o volume da caixa é $V = (a-2x)^2 x$.

Aplicando as desigualdades das médias podemos escrever

$$\frac{V}{16} = \frac{(a-2x)}{4} \cdot \frac{(a-2x)}{4} \cdot x \leq \left(\frac{\frac{a-2x}{4} + \frac{a-2x}{4} + x}{3} \right)^3 = \left(\frac{a}{6} \right)^3$$

atingindo o valor máximo quando se tem a igualdade, ou seja quando $\frac{a-2x}{4} = x \Leftrightarrow x = \frac{a}{6}$.

A desigualdade entre as médias aritmética e geométrica tem como consequência as seguintes afirmações:

Proposição 8.5.

I. *Se a soma de n números positivos for constante, então o produto é máximo quando todos os números forem iguais.*

II. *Se o produto de n números positivos for constante, então a soma é mínima quando todos os números forem iguais.*

Demonstração:

Afirmação I

Sejam $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ números positivos tais que $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$ em que k é uma constante real.

Consideremos a função $f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$.

Da desigualdade das médias podemos escrever $\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$, ou seja

$$\frac{k}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n \leq \left(\frac{k}{n}\right)^n \Leftrightarrow f(x_1, x_2, ..., x_n) \leq f\left(\frac{k}{n}, \frac{k}{n}, ..., \frac{k}{n}\right),$$
$$\forall x_1, x_2, ..., x_n > 0$$

donde se conclui que o máximo de f é atingindo quando $x_1 = x_2 = ... = x_n = \frac{k}{n}$.

Afirmação II

Sejam $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ números positivos tais que $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = c^n$ em que c é uma constante real.

Consideremos a função $g(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 + x_2 + ... + x_n$.

Da desigualdade das médias podemos escrever $\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$, ou seja

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq c \Leftrightarrow x_1 + x_2 + ... + x_n \geq nc \Leftrightarrow g(x_1, x_2, ..., x_n) \geq g(c, c, ..., c), \quad \forall x_1, x_2, ..., x_n > 0$$

donde se conclui que o valor mínimo da função g é atingido quando $x_1 = x_2 = ... = x_n = c$.□

Como consequência da afirmação I podemos resolver a seguinte questão que foi abordada por outros métodos no capítulo 3.

7) *Provar que, de todos os triângulos com o mesmo perímetro, o equilátero possui maior área.*

Consideremos o triângulo de lados a, b, c com $a + b + c = p$.

Pela fórmula de Héron a área do triângulo é dada por $A = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right)}$ ou seja $A = \sqrt{\frac{p}{2}} \cdot \sqrt{\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right)}$.

Como $\frac{p}{2}$ é constante, a área será máxima quando $\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)$ for máximo.

Mas $\frac{p}{2}-a+\frac{p}{2}-b+\frac{p}{2}-c=\frac{3p}{2}-(a+b+c)=\frac{3p}{2}-p=\frac{p}{2}$, que é constante.

Então pela afirmação I o produto será máximo quando

$\frac{p}{2}-a=\frac{p}{2}-b=\frac{p}{2}-c$, ou seja quando $a=b=c=\frac{p}{3}$, como queríamos demonstrar.

8) Podemos aplicar a afirmação II à resolução do problema 7.14 e sai logo que a soma é mínima quando $x=y$, mas $y=\frac{c}{x}$, donde se conclui que $x^2=c$ e como $x>0$, vem $x=\sqrt{c}$.

Bibliografia

A Alta Matemática das Abelhas Geômetras. (maio de 2010). Obtido em 24 de abril de 2012, de "Servos, porém Livres!": http://servoporemlivre.blogspot.pt/2010/05/alta-matematica-das-abelhas-geometras.html

A Matemática dos Alvéolos. (s.d.). Obtido em 24 de abril de 2012, de Apiário Canto do Rio: http://apiariocantodorio.wordpress.com/a-matematica-dos-alveolos/

Apostol, T. M. (1967). *Calculus.* Estados Unidos da América: John Wiley & Sons, Inc.

Ashbaugh, M., & Benguria, R. (24 a 26 de maio de 2010). *The Problem of Queen Dido.* Obtido em 9 de abril de 2012, de International Conference on the Isoperimetric Problem of Queen Dido and its Mathematical Ramifications: http://math.arizona.edu/~dido/dido-isoperimetry-history.pdf

Boyer, C. B. (1974). *História da Matemática.* São Paulo: Editora Edgar Blucher Ltda.

Brown, R. M. (22 de agosto de 2006). *Maximum-minimum Problems.* Obtido em 12 de janeiro de 2012, de Math Sciences: http://www.ms.uky.edu/~rbrown/courses/ma113.f.06rb/lect17-maxmin.pdf

Explorando o Ensino da Matemática. (2004). Brasília: Secretaria da Educação Básica.

Faoro, T. C. (2010). *Geometria das Abelhas.* Dourados: Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul.

Faria, I. (2004). *Apontamentos de Análise II.* Lisboa: Instituto Superior de Agronomia.

Figueira, M. S. (2001). *Fundamentos de Análise Infinitesimal.* Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Gave, Gabinete de Avaliação Educacional. (Julho de 1999). Obtido em 12 de Abril de 2012, de Gave, Arquivo de Provas: http://bi.gave.min-edu.pt/exames/download/matematica135_pef1c2_99.pdf?id=2767

Ioffe, A. D., & Tihomirov, V. M. (1979). *Theory of Extremal Problems.* Nova Iorque: North-Holland Publishing Company.

Jensen, S. (novembro de 2004). *An Introduction to Lagrange Multipliers*. Obtido em 17 de abril de 2012, de The World of Steuard Jensen: http://www.slimy.com/~steuard/teaching/tutorials/Lagrange.html

Kouba, D. (16 de junho de 1998). *Maximum/Minimum Problems.* Obtido em 1 de outubro de 2011, de UC Davis Mathematics: http://www.math.ucdavis.edu/~kouba/CalcOneDIRECTORY/maxmindirectory/

Lima, E. L. (2006). *Análise Real.* Rio de Janeiro: IMPA.

Lima, G. L. (2004). *Cálculo Variacional: Problemas Clássicos, Aspectos Teóricos e Desdobramentos.* Campinas: Universidade Estadual de Campinas.

Limberger, R. (2011). *Abordagens do Problema Isoperimétrico.* Campinas: IMECC.

Maeterlinck, M. (1999). *La Vida de las Abejas.* Ediciones Elaleph.com.

Martins, D. M. (2009). *A Geometria das Abelhas.* Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, ICEX.

Martins, J. A., Doria, E. C., Calabró, M. C., & Zagatti, R. V. (2009). *Abelhas: A Matemática dos Alvéolos - Um Problema Prático de Geometria.* São Paulo: Universidade de São Paulo, IME.

Moreira, C. G., & Saldanha, N. C. (dezembro de 1993). A Desigualdade Isoperimétrica. *Matemática Universitária* , pp. 13-19.

Saborío, E. H. (20 de janeiro de 2006). *Aplicaciones de la Derivada.* Obtido em 1 de outubro de 2011, de Cálculo Diferencial e Integral: http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/CALCULODIFERENCIAL/curso-elsie/aplicacionesderivada/html/aplicacionesder.pdf

Salas, S. L., Etgen, G. J., & Hille, E. (1998). *Calculus One and Several Variables.* Nova Iorque: John Wiley & Sons.

Sérgio, P. (22 de janeiro de 2010). *Fatos Matemáticos*. Obtido em 12 de março de 2012, de http://fatosmatematicos.blogspot.pt

Silva, R. A., Costa, M. L., & Silva, D. J. (10 de novembro de 2010). *A Matemática das Abelhas Através da Resolução de Problemas.* Obtido em 23 de abril de 2012, de Sociedade Brasileira de Educação Matemática: http://www.sbempb.com.br/anais/arquivos/trabalhos/CC-17039362.pdf

Spina, C. d. (2002). *Modelagem da Matemática no Processo Ensino- Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral para o Ensino Médio.* Rio Claro: Universidade Estadual Paulista.

Stewart, J. (2006). *Cálculo.* São Paulo: Pioneira Thomson Learning.

Teixeira, J. C. (19 de dezembro de 2009). *As Abelhas Geômetras*. Obtido em 24 de abril de 2012, de República Editorial: http://www.republicaeditorial.com.br/?p=488

Teles, A. L., Vieira, A., Ali, A., & Antunes, F. (1997). *A Matemática na Vida das Abelhas.* Lisboa: APM.

The problem of Dido. (21 de dezembro de 2008). Obtido em 19 de janeiro de 2012, de Mathematical Garden: http://mathematicalgarden.wordpress.com/2008/12/21/the-problem-of-dido/

Thikomirov, V. M. (1991). *Stories About Maxima and Minima.* American Mathematical Society.

Viegas, C., Gomes, F., & Lima, Y. (2012). *Xeqmat 12.* Lisboa: Texto Editores, Lda.

Vieira, F. B., Rodrigues, L. B., & Agustini, E. (abril de 2005). O Teorema Isoperimétrico e o Problema da Cerca. *FAMAT em Revista* , pp. 141-152.